Análisis II–Análisis matemático II–Matemática 3.

Práctica 1 - Curvas, integral de longitud de arco e integrales curvilíneas.

Curvas

Definición 1. Una curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ es un conjunto de puntos en el espacio que puede describirse mediante un parámetro que varía en forma continua en un intervalo de la recta.

Más precisamente, $\mathcal{C}$ es una curva si existen funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ definidas en algún intervalo $[a, b]$ tales que $(x, y, z) \in \mathcal{C}$ si y sólo si existe $t \in [a, b]$ tal que

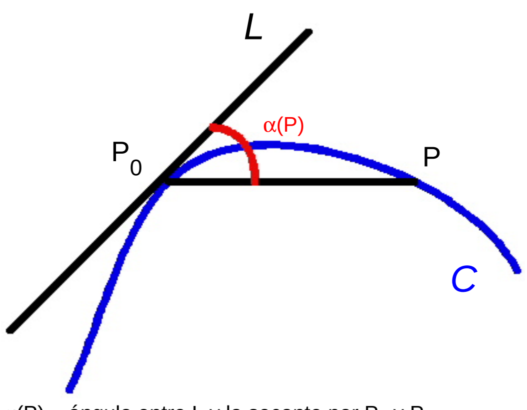
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

Llamemos $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ a la función $\sigma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$. Entonces, $\mathcal{C}$ es la imagen por σ del intervalo $[a, b]$. σ se llama una "parametrización de $\mathcal{C}$".

Definición 2. Una curva abierta $\mathcal{C}$ se dice "simple" si no se corta a si misma. Más precisamente, si admite una parametrización inyectiva.

Definición 3. Sea $\mathcal{C}$ una curva, $P_0 \in \mathcal{C}$. Una recta L por P_0 se llama tangente a $\mathcal{C}$ en P_0 si es el límite de las rectas secantes a $\mathcal{C}$ por P_0. Estas son las rectas que pasan por P y P_0 con $P \in \mathcal{C}$.

El límite se entiende en el sentido de que el ángulo entre L y la secante por P_0 y P tiende a 0 cuando P se acerca a P_0 con $P \in \mathcal{C}$.



α(P) = ángulo entre L y la secante por P_0 y P

Proposición. Si $\mathcal{C}$ es una curva que admite una parametrización $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ con $\sigma \in C^1([a, b])$, inyectiva y $\sigma'(t_0) := \big(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\big) \neq (0, 0, 0)$ para un $t_0 \in [a, b]$, se sigue que $\mathcal{C}$ tiene recta tangente en el punto $P_0 = \sigma(t_0)$ y esta recta tiene la dirección del vector $\sigma'(t_0)$.

Definición 4. Una curva se dice "suave" si tiene recta tangente en todos sus puntos y ésta varía con continuidad en el sentido de que L_P tiende a L_{P_0} cuando $P \to P_0$.

Más precismante, llamamos L_P a la tangente en el punto $P \in \mathcal{C}$. Escribamos $L_P = P + L'_P$ donde L' es una recta por el origen. Decimos que L_P tiende a L_{P_0} cuando $P \to P_0$ si $L'_P \to L'_{P_0}$.

Una parametrización $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ de una curva abierta, simple, suave $\mathcal{C}$ se dice "regular" si σ es una biyección entre $[a,b]$ y $\mathcal{C}$, $\sigma \in C^1([a,b])$ y $\sigma'(t) \neq (0,0,0)$ para todo $t \in [a,b]$.

Definición 5. $\mathcal{C}$ es una curva cerrada, simple si existe una parametrización $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ que es inyectiva en $[a,b)$, continua en $[a,b]$, $\sigma(a) = \sigma(b)$ y la imagen de σ es $\mathcal{C}$.

Si C es una curva cerrada, simple, suave, una parametrización $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ se dice "regular" si σ es inyectiva en $[a,b)$, la imagen de σ es $\mathcal{C}$, $\sigma \in C^1([a,b])$, $\sigma(a) = \sigma(b)$, $\sigma'(a) = \sigma'(b)$ y $\sigma'(t) \neq (0,0,0)$ para todo $t \in [a,b]$.

Definición 6. Decimos que $\mathcal{C}$ es una curva simple si es una curva abierta simple o una curva cerrada simple.

Ejercicio 1

1. Probar que

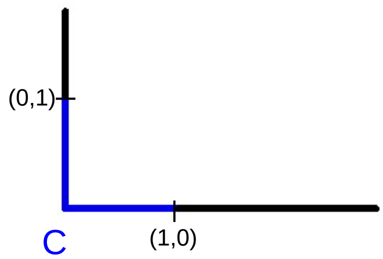
$$\begin{cases} x_1(t) = r\cos 2\pi t \\ \\ y_1(t) = r \operatorname{sen} 2\pi t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1 \qquad\qquad \begin{cases} x_2(t) = r\cos 4\pi t \\ \\ y_2(t) = r \operatorname{sen} 4\pi t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

   son dos parametrizaciones C^1 de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio r.

2. Probar que la circunferencia es una curva cerrada, simple, suave.

3. Probar que $\sigma_2(t) = \big(x_2(t), y_2(t)\big)$, $t \in [0,1]$ no es una parametrización regular.

Ejercicio 2 Considerar la curva $\mathcal{C}$ formada por los segmentos que unen el $(0,1)$ con el $(0,0)$ y el $(0,0)$ con el $(1,0)$.



Probar que

$$\sigma(t) := \begin{cases} \big(0, (1-t)^2\big), & \text{si } 0 \le t \le 1, \\ \big((t-1)^2, 0\big), & \text{si } 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

es una parametrización C^1 de la curva $\mathcal{C}$.

Observar que $\mathcal{C}$ no tiene recta tangente en el $(0,0)$. ¿Por qué no hay contradicción?

Ejercicio 3 Sea $\sigma(t) = (t^3, t^3)$ con $-1 \le t \le 1$.

Probar que σ es una parametrización C^1 del segmento $y = x$, $-1 \le x \le 1$ que es una curva suave.

Observar que $\sigma'(0) = (0,0)$.

Ejercicio 4 Sea $\mathcal{C}$ el arco de parábola $y = x^2$ con $0 \leq x \leq 1$.

1. Probar que $\mathcal{C}$ es una curva abierta, simple, suave
2. Probar que $\bar{\sigma}(s) := \big(\bar{x}(s), \bar{y}(s)\big)$ dada por

$$\begin{cases} \bar{x}(s) = e^s - 1 \\ \\ \bar{y}(s) = (e^s - 1)^2 \end{cases} \qquad\qquad 0 \leq s \leq \ln 2$$

   es una parametrizacíón regular de $\mathcal{C}$.

3. Observar que $\sigma(t) := (t, t^2)$ con $t \in [0, 1]$ es otra parametrización regular.
4. Hallar una función $g : [0, 1] \to [0, \ln 2]$ tal que $\bar{\sigma}\big(g(t)\big) = \sigma(t)$ para todo $t \in [0, 1]$.
   Observar que g es biyectiva y C^1.

Ejercicio 5 Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada, simple, suave y $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Sean $\bar{a} \in (a, b)$ y $\bar{b} = \bar{a} + b - a$. Consideremos la función $\bar{\sigma} : [\bar{a}, \bar{b}] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\bar{\sigma}(s) = \begin{cases} \sigma(s) & \text{si } s \in [\bar{a}, b], \\ \sigma\big(a + (s - b))\big) & \text{si } s \in [b, \bar{b}] \end{cases}$$

Probar que $\bar{\sigma}$ es una parametrización regular de $\mathcal{C}$ (que recorre la curva $\mathcal{C}$ desde y hasta el punto $\sigma(\bar{a})$).

Ejercicio 6 Sea $\mathcal{C}$ una curva simple, suave. Sea $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Sea $[a_1, b_1]$ un intervalo arbitrario. Consideremos la función $\sigma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\sigma_1(s) = \sigma\Big(a + \frac{b - a}{b_1 - a_1}(s - a_1)\Big).$$

Probar que σ_1 es una parametrización regular de $\mathcal{C}$.

Definición 7. Sea $\sigma(t)$ la posición en el instante t de una partícula que se mueve en el espacio en forma continua. Esta partícula recorre una curva $\mathcal{C}$ y σ es una parametrización de $\mathcal{C}$.

En este contexto $\sigma'(t)$ es un vector cuya magnitud da la rapidez con la que se mueve la partícula al pasar por el punto $\sigma(t)$. Además, este vector da la dirección y sentido del movimiento. Por eso se lo denomina "vector velocidad".

Por un razonamiento análogo, al vector $\sigma''(t)$ se lo denomina "vector aceleración".

Conservaremos esta nomenclatura para estos vectores aún cuando la curva $\mathcal{C}$ y/o la parametrización σ no correspondan a la trayectoria de una partícula.

Ejercicio 7 Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente para cada una de las curvas cuyas parametrizaciones se dan a continuación, en el valor especificado de t.

1. $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3), \quad t = 0$
2. $\sigma(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t), \quad t = 0$

3. $\sigma(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{3}{2}}), \quad t = 1$

4. $\sigma(t) = (0, 0, t), \quad t = 1$

Ejercicio 8 ¿Qué fuerza actúa sobre una partícula de masa m en el instante $t = 0$ si sigue la trayectoria dada por la función σ del Ejercicio 7.(1)?

Ejercicio 9 Suponer que una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ hasta que sale por una tangente en $t = 1$. Hallar la ubicación de la partícula en $t = 2$. Suponer que ninguna fuerza actúa sobre ella después del tiempo $t = 1$.

Integral de longitud de arco

Ejercicio 10 Considerar una partícula que se mueve siguiendo la trayectoria $\sigma(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$. Hallar la velocidad, rapidez, y la longitud del arco descripto por la partícula entre los puntos $\sigma(0)$ y $\sigma(1)$. Observar que σ describe la función de posición de un punto en un círculo de radio 1, que va rodando. La curva que describe se conoce como cicloide.

Ejercicio 11 En los siguientes casos, calcular la longitud de la curva, donde σ es una parametrización de la misma sobre el intervalo $[a, b]$, siendo:

1. $\sigma(t) = (t, t^2) \quad a = 0, \quad b = 1$

2. $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t + 1, t) \quad a = 10 \quad b = 20$

Ejercicio 12 Sea $\mathcal{C}$ una curva simple, suave y $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de la misma. Para cada $t \in [a, b]$ sea $g(t)$ la longitud del arco de curva entre los puntos $\sigma(a)$ y $\sigma(t)$. Sabemos que

$$g(t) = \int_a^t \|\sigma'(\tau)\| \, d\tau.$$

La función $g(t)$ resulta ser continuamente diferenciable con derivada no nula para todo t. (En particular, se tiene que $\|\sigma'(t)\| = g'(t)$ es la variación instantánea de la longitud de arco en el punto $\sigma(t)$. Esto justifica que, cuando $\sigma(t)$ describe la posición de una partícula que se mueve sobre la curva $\mathcal{C}$, la magnitud $\|\sigma'(t)\|$ es la rapidez con que se mueve la partícula).

Por ser $g'(t) \neq 0$ para todo t, la función g admite una inversa continuamente diferenciable.

Sea $\tilde{\sigma}(s) = \sigma\big(g^{-1}(s)\big)$. Probar que $\tilde{\sigma} : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$, con ℓ la longitud de $\mathcal{C}$, es una parametrización regular de $\mathcal{C}$ tal que la longitud del arco que va de $\tilde{\sigma}(0)$ a $\tilde{\sigma}(s)$ es s.

Esto justifica la notación ds que muchas veces se da al diferencial de longitud de arco.

Ejercicio 13 Sea $\mathcal{C}$ la curva dada por

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \qquad t > 0 \\ z = b\, t \end{cases}$$

Parametrizar esta curva por longitud de arco.

Ejercicio 14 Evaluar las integrales de longitud de arco $\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\, ds$, donde σ es una parametrización de $\mathcal{C}$, en los casos siguientes

1. $f(x,y,z) = x + y + z, \quad \sigma(t) = (\text{sen}t, \cos t, t), \quad t \in [0, 2\pi]$
2. $f(x,y,z) = \cos z, \quad \sigma$ como en la parte 1.
3. $f(x,y,z) = x \cos z, \quad \sigma(t) = (t, t^2, 0), \quad t \in [0, 1]$

Ejercicio 15

1. Mostrar que la integral de longitud de arco de $f(x,y)$ a lo largo de una curva dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

2. Calcular la longitud de la curva $r = 1 + \cos\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Ejercicio 16 Suponer que la semicircunferencia parametrizado por:

$$\sigma(\theta) = (0, a\,\text{sen}\,\theta, a\cos\theta), \qquad \theta \in [0, \pi],$$

con $a > 0$, está hecha de alambre con densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.

1. ¿Cuál es la masa total del alambre?
2. ¿Dónde está el centro de masa de esta configuración de alambre?
3. Si la temperatura ambiente es igual a $x + y - z$ en el punto (x, y, z), calcular la temperatura promedio sobre el alambre.

Ejercicio 17 Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable a trozos, el gráfico de f en $[a, b]$ es una curva que se puede parametrizar como $\sigma(t) = (t, f(t))$ para $t \in [a, b]$.

1. Mostrar que la longitud del gráfico de f en [a,b] es

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

2. Hallar la longitud del gráfico de $y = \log x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

Ejercicio 18 Se quiere pintar una cerca que se encuentra sobre un campo ondulado. La cerca se encuentra a una distancia variable de una ruta recta que supondremos que ocupa el eje y.

Pongamos el kilómetro 0 de la ruta a la altura del comienzo de la cerca. Esta se encuentra entre los kilómetros 0 y 1, a una distancia variable igual a $y(1 - y) + 1$ del kilómetro y de la ruta (calculada sobre el plano del nivel del mar).

El terreno puede describirse por medio de su altura sobre el nivel del mar. Con ese fin, describiremos el plano del nivel del mar en términos de la distancia x (en kilómetros) desde el punto a la ruta (sobre el plano) y del kilometraje y que le corresponde sobre la ruta. En estos términos, la altura z del terreno sobre el nivel del mar en los puntos (x, y) cercanos a la cerca es $(1 - y) + x$.

Nuestra cerca tiene altura variable $h = \frac{1+y}{750}$ a la altura del kilómetro y de la ruta si $0 \le y \le 1/2$ y $h = \frac{2-y}{750}$ si $1/2 \le y \le 1$.

Si 1 litro de pintura rinde $4\, m^2$ ¿Cuántos litros de pintura tengo que comprar?

Integrales curvilíneas

Ejercicio 19 Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Evaluar la integral curvilínea de $\mathbf{F}$ a lo largo de las curvas orientadas $\mathcal{C}$ dadas por las siguientes parametrizaciones:

1. $\sigma(t) = (t, t, t), \quad 0 \leq t \leq 1$
2. $\sigma(t) = (\sin t, 0, \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

Ejercicio 20 Para las curvas orientadas $\mathcal{C}$ parametrizadas por las correspondientes funciones σ, evaluar las integrales siguientes:

1. $\int_{\mathcal{C}} x\,dy - y\,dx, \quad \sigma(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
2. $\int_{\mathcal{C}} x\,dx + y\,dy, \quad \sigma(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t)), \quad 0 \leq t \leq 2$

Ejercicio 21 Considerar la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2$, $z = 0$, de $x = -1$ a $x = 2$.

Ejercicio 22 Sea $\mathcal{C}$ una curva orientada suave parametrizada por σ.

1. Suponer que $\mathbf{F}$ es perpendicular a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$ para todo t. Mostrar que
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$
2. Si $\mathbf{F}$ es paralelo a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$ para todo t, mostrar que
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} ||\mathbf{F}||\,ds.$$
(Aquí, por paralelo a $\sigma'(t)$ se entiende que $\mathbf{F}\big(\sigma(t)\big) = \lambda(t)\sigma'(t)$, donde $\lambda(t) > 0$.)

Ejercicio 23 ¿Cuál es el valor de la integral curvilínea de un campo gradiente sobre una curva cerrada C?

Ejercicio 24 Suponer que $\nabla f(x, y, z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$. Si $f(0, 0, 0) = 5$, hallar $f(1, 1, 2)$.

Ejercicio 25 Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G = m = M = 1$) definido (para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$) por:
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z).$$
Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2), a lo largo de cualquier trayectoria, depende sólo de los radios $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

Ejercicio 26 Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función C^1, $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo C^1 y $\mathbf{F} = \nabla f + \mathbf{G}$. Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada, simple, suave, orientada. Verificar que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}.$$

Ejercicio 27 Sea $\mathcal{C}$ una curva suave, $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Sea $g : [\bar{a}, \bar{b}] \to [a, b]$ una biyección C^1 con $g'(\tau) \neq 0$ para todo $\tau \in [a, b]$. Sea $\bar{\sigma} : [\bar{a}, \bar{b}] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{\sigma}(s) = \sigma\big(g(s)\big)$. Llamamos a $\bar{\sigma}$ una **reparametrización** de σ.

1. Probar que $\bar{\sigma}$ es una parametrización regular de $\mathcal{C}$.
2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua. Ver que el cálculo de $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$ da el mismo resultado cuando la integral se evalúa utilizando la parametrización σ o la parametrización $\bar{\sigma}$.
3. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continua. Suponer que orientamos a $\mathcal{C}$ con la orientación dada por σ. Ver que el cálculo de $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ utilizando la parametrización $\bar{\sigma}$ da el mismo resultado que cuando se utiliza σ, si $\bar{\sigma}$ preserva la orientación de $\mathcal{C}$. Ver que si no es asi, los resultados difieren sólo en el signo.