

# Álgebra 1

## Práctica 7 - Polinomios

1. Calcular el coeficiente de  $X^{20}$  de  $f$  en los casos

i)  $f = (X - 3)^{133}$

ii)  $f = (X - 1)^4(X + 5)^{19} + X^{33} - 5X^{20} + 7$

iii)  $f = X^{10}(X^5 + 4)^7$

2. Calcular el grado y el coeficiente principal de  $f$  en los casos

i)  $f = (4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$

ii)  $f = (-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$

iii)  $f = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$

3. Hallar, cuando existan, todos los  $f \in \mathbb{C}[X]$  tales que

i)  $f^2 = Xf + X + 1$

ii)  $f^2 - Xf = -X^2 + 1$

iii)  $(X + 1)f^2 = X^3 + Xf$

iv)  $f \neq 0$  y  $f^3 = \text{gr}(f) \cdot X^2 f$

4. Hallar el cociente y el resto de la división de  $f$  por  $g$  en los casos

i)  $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4, \quad g = X^2 + 2$

ii)  $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4, \quad g = 2X^3 + 1$

iii)  $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4, \quad g = 2X + 1$

iv)  $f = 6X^5 + 3X^2 - 9X + 1, \quad g = 3X + 2$

v)  $f = X^9 - 3X^7 + X^6 - 2X^5 + 3X^3 - X^2 + 3, \quad g = X^5 + 4X - 1$

5. Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que

i)  $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  sea divisible por  $X^2 + aX + 1$

ii)  $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$  sea divisible por  $X^2 + X + 1$

iii) el resto de la división de  $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$  por  $X^2 + aX + 1$  sea  $-8X + 4$

6. Sea  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  y sea  $h \in \mathbb{K}[X]$ . Probar que si  $f, g, p, q \in \mathbb{K}[X]$  entonces

i)  $f \equiv f(h)$

ii) si  $f \equiv g(h)$  entonces  $g \equiv f(h)$

iii) si  $f \equiv g(h)$  y  $g \equiv p(h)$  entonces  $f \equiv p(h)$

iv) si  $f \equiv g(h)$  y  $p \equiv q(h)$  entonces  $f + p \equiv g + q(h)$  y  $f \cdot p \equiv g \cdot q(h)$

v) si  $f \equiv g(h)$  entonces  $f^n \equiv g^n(h)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$

vi)  $r$  es el resto de la división de  $f$  por  $h$  si y sólo si  $f \equiv r(h)$  y  $r = 0$  ó  $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$

7. Hallar el resto de la división de  $f$  por  $h$  en los casos

i)  $f = X^{353} - X - 1, \quad h = X^{31} - 2$

ii)  $f = X^{45} + X^{28} - X^{13} + 3, \quad h = X^{17} + 5$

$$\text{iii) } f = X^{1000} - X^{40} + 11X^{20} + 12X^2 - 2, \quad h = X^6 + 1$$

$$\text{iv) } f = X^{200} - 3X^{101} + 2, \quad h = X^{100} - X + 1$$

8. Sea  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  y sea  $a \in \mathbb{K}$ . Probar que

$$\text{i) } X - a \mid X^n - a^n$$

$$\text{ii) si } n \text{ es impar entonces } X + a \mid X^n + a^n$$

$$\text{iii) si } n \text{ par entonces } X + a \mid X^n - a^n$$

9. i) Sea  $f \in \mathbb{Z}[X]$  y sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  y  $m \in \mathbb{N}$ . Probar que si  $a \equiv b \pmod{m}$  entonces  $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$

ii) Probar que no existe  $f \in \mathbb{Z}[X]$  tal que  $f(3) = 4$  y  $f(-2) = 7$

10. Hallar todos los  $f \in \mathbb{Z}[X]$  tales que

$$\text{i) } f \text{ es mónico de grado 3 y } f(\sqrt{2}) = 5$$

$$\text{ii) } f \text{ es mónico de grado 3 y } f(1) = -f(-1)$$

11. i) Hallar todos los  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado 3 cuyas únicas raíces complejas sean  $1, -\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{5}$

ii) Hallar todos los  $f \in \mathbb{Z}[X]$  de grado 3 cuyas únicas raíces complejas sean  $1, -\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{5}$

iii) Hallar todos los  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado 4 cuyas únicas raíces complejas sean  $1, -\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{5}$

12. Sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$  tal que  $f(1) = -2, f(2) = 1$  y  $f(-1) = 0$ . Hallar el resto de la división de  $f$  por  $X^3 - 2X^2 - X + 2$

13. Sea  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ . Hallar el resto de la división de  $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$  por  $X^3 - X$

i) usando congruencias

ii) evaluando en puntos convenientes

14. Calcular el máximo común divisor entre  $f$  y  $g$  y escribirlo como combinación lineal de  $f$  y  $g$  siendo

$$\text{i) } f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2, \quad g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$$

$$\text{ii) } f = X^6 + X^4 + X^2 + 1, \quad g = X^3 + X$$

$$\text{iii) } f = X^5 + X^4 - X^3 + 2X - 3, \quad g = X^4 + 2X + 1$$

15. i) Sean  $f, g \in \mathbb{C}[X]$  y sea  $a \in \mathbb{C}$ . Probar que  $a$  es raíz de  $f$  y de  $g$  si y sólo si  $a$  es raíz de  $(f : g)$

ii) Hallar todas las raíces complejas de  $X^4 + 3X - 2$  sabiendo que tiene una raíz común con  $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$

16. i) Hallar todas las raíces racionales de

$$\text{(a) } 2X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X$$

$$\text{(b) } X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{2}X - 3$$

$$\text{(c) } 3X^4 + 8X^3 + 6X^2 + 3X - 2$$

ii) Probar que  $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2$  no tiene raíces racionales

17. i) Hallar todas las raíces complejas de  $f = X^5 - 4X^4 - X^3 + 9X^2 - 6X + 1$  sabiendo que  $2 - \sqrt{3}$  es raíz de  $f$

ii) Hallar  $f \in \mathbb{Q}[X]$  mónico de grado mínimo que tenga a  $1 + 2\sqrt{5}$  y a  $3 - \sqrt{2}$  como raíces

- iii) Sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$  un polinomio de grado 5. Probar que si  $\sqrt{2}$  y  $1 + \sqrt{3}$  son raíces de  $f$  entonces  $f$  tiene una raíz racional
- iv) Sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$  tal que  $f(1 + \sqrt{2}) = 3$ ,  $f(2 - \sqrt{3}) = 3$  y  $f(1 + \sqrt{5}) = 3$ . Calcular el resto de la división de  $f$  por  $(X^2 - 2X - 1)(X^2 - 4X + 1)(X^2 - 2X - 4)$

18. Sea  $n \in \mathbb{N}$  y sean  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$  tales que  $a_j \neq a_k$  si  $j \neq k$ . Probar que

$$f = \sum_{k=0}^n b_k \left( \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{X - a_j}{a_k - a_j} \right)$$

es el único polinomio en  $\mathbb{C}[X]$  que es nulo o de grado menor o igual que  $n$  y que satisface  $f(a_k) = b_k$  para todo  $0 \leq k \leq n$

19. Hallar  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado mínimo tal que

- i)  $f(1) = 3$ ,  $f(0) = \frac{1}{4}$ ,  $f(\frac{1}{2}) = 3$  y  $f(-1) = 1$
- ii)  $f(2) = 0$ ,  $f(-3) = \frac{1}{2}$ ,  $f(3) = -1$  y  $f(-2) = 1$

20. Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^3 + 2X - 1, \quad f_{n+1} = Xf_n^2 + X^2f_n' \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que  $\text{gr}(f_n) = 2^{n+1} - 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$

21. Determinar la multiplicidad de  $a$  como raíz de  $f$  en los casos

- i)  $f = X^5 - 2X^3 + X$ ,  $a = 1$
- ii)  $f = 4X^4 + 5X^2 - 7X + 2$ ,  $a = \frac{1}{2}$
- iii)  $f = X^6 - 3X^4 + 4$ ,  $a = i$
- iv)  $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1)$ ,  $a = 2$

22. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Hallar todos los  $f \in \mathbb{C}[X]$  tales que  $(X - 1)^{n+1}f' = f^2$

23. i) Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  para los cuales  $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$  tiene todas sus raíces simples
- ii) Determinar todos los  $a \in \mathbb{R}$  para los cuales  $f = X^{2n+1} - (2n+1)X + a$  tiene al menos una raíz múltiple

24. Hallar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que  $X^6 - 2X^5 + (1+a)X^4 - 2aX^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1$  es divisible por  $(X - 1)^3$

25. Hallar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que 1 sea raíz doble de  $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$

26. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que

- i)  $\sum_{k=0}^n X^k$  tiene todas sus raíces simples
- ii)  $\sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$  tiene todas sus raíces simples

27. Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^4 + 2X^2 + 1, \quad f_{n+1} = (X - i)(f_n + f'_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que  $i$  es raíz doble de  $f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$

28. Sea  $f \in \mathbb{C}[X]$ . Probar que  $a \in \mathbb{C}$  es raíz múltiple de  $f$  si y sólo si es raíz de  $(f : f')$ . Deducir que si  $f \in \mathbb{Q}[X]$  es irreducible entonces tiene todas sus raíces simples

29. Factorizar el polinomio  $f$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$  en los casos

i)  $f = X^4 - X^3 + X^2 - 3X - 6$

ii)  $f = X^4 - 6X^2 + 1$

iii)  $f = X^6 - 2$

iv)  $f = X^5 - X^3 + 17X^2 - 16X + 15$ , sabiendo que  $1 + 2i$  es raíz de  $f$

v)  $f = X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 - 1$ , sabiendo que  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$  es raíz de  $f$

30. Hallar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que  $f = X^4 - (a + 4)X^3 + (4a + 5)X^2 - (5a + 2)X + 2a$  tenga a  $a$  como raíz doble. Para cada valor de  $a$  hallado, factorizar  $f$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$

31. Factorizar el polinomio  $f = X^6 + X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 4$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$  sabiendo que  $\sqrt{2}i$  es raíz múltiple de  $f$

32. Factorizar el polinomio  $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 10X - 10$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$  sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura

33. Hallar todos los  $a \in \mathbb{C}$  para los cuales al menos una de las raíces de

$$f = X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + a$$

sea una raíz sexta primitiva de la unidad. Para cada valor de  $a$  hallado, factorizar  $f$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$

34. Sean  $a, b$  y  $c$  las raíces complejas de  $2X^3 - 3X^2 + 4X + 1$ .

i) Hallar

(a)  $a + b + c$

(d)  $a^2 + b^2 + c^2$

(g)  $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$

(b)  $ab + ac + bc$

(e)  $a^3 + b^3 + c^3$

(h)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

(c)  $abc$

(f)  $a^4 + b^4 + c^4$

(i)  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

ii) Encontrar un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean  $a + b$ ,  $a + c$  y  $b + c$

35. Factorizar el polinomio  $X^4 + X^3 - 3X^2 + 4X - 2$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$  sabiendo que la suma de tres de sus raíces es  $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

36. Hallar todas las raíces complejas del polinomio  $X^6 - X^5 - 7X^4 - 7X^3 - 7X^2 - 8X - 6$  sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 2 y cuyo producto es -6

37. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Usando que  $w \in G_n$  si y solo si  $w$  es raíz del polinomio  $X^n - 1$ , dar una nueva demostración de que la suma de las raíces  $n$ -ésimas de 1 distintas de 1 es  $-1$ . Calcular  $\prod_{w \in G_n} w$ .

38. Sea  $f$  un polinomio de grado  $n$  con raíces distintas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Probar que el coeficiente de grado  $n - 1$  de  $f$  es 0 si y solo si  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ . ¿Qué se puede decir si hay raíces repetidas?

39. Sea  $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ . Si todas las raíces de  $f$  son enteros pares, probar que  $2^j \mid a_{n-j} \forall j = 0, \dots, n$ .