Álgebra 1

Práctica 4 - Enteros (primera parte)

1. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}$

i) $a.b \mid c \Longrightarrow a \mid c$ y $b \mid c$

ii) $4 \mid a^2 \Longrightarrow 2 \mid a$

iii) $2 \mid a.b \Longrightarrow 2 \mid a$ ó $2 \mid b$

iv) $9 \mid a.b \Longrightarrow 9 \mid a$ ó $9 \mid b$

v) $a \mid b + c \Longrightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$

vi) $a \mid c$ y $b \mid c \Longrightarrow a.b \mid c$

vii) $a \mid b \Longrightarrow a \leq b$

viii) $a \mid b \Longrightarrow |a| \leq |b|$

ix) $a \mid b + a^2 \Longrightarrow a \mid b$

2. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) $3n - 1 \mid n + 7$

ii) $3n - 2 \mid 5n - 8$

iii) $2n + 1 \mid n^2 + 5$

iv) $n - 2 \mid n^3 - 8$

3. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $99 \mid 10^{2n} + 197$

ii) $9 \mid 7.5^{2n} + 2^{4n+1}$

iii) $56 \mid 13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$

iv) $256 \mid 7^{2n} + 208n - 1$

4. i) Probar que $a - b \mid a^n - b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Probar que si n es un número natural par entonces $a + b \mid a^n - b^n$.

iii) Probar que si n es un número natural impar entonces $a + b \mid a^n + b^n$.

5. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) El producto de n enteros consecutivos es divisible por $n!$

ii) $\dbinom{2n}{n}$ es divisible por 2

iii) $2^n.\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(2i - 1)$ es divisible por $n!$

iv) $\dbinom{2n}{n}$ es divisible por $n + 1$

Sugerencia: probar que $(2n+1)\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n+1}{n}$ y observar que $\binom{2n}{n} = (2n+2)\binom{2n}{n} - (2n+1)\binom{2n}{n}$.

6. Hallar todos los primos positivos menores o iguales que 100

7. i) Probar que un número natural n es compuesto si y sólo si es divisible por algún primo positivo $p \leq \sqrt{n}$

ii) Determinar cuáles de los siguientes enteros son primos: 91, 209, 307, 791, 1001, 3001.

8. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que

i) si $n \neq 1$ y $n \mid (n-1)! + 1$ entonces n es primo
ii) si $2^n - 1$ es primo entonces n es primo
iii) si $2^n + 1$ es primo entonces n es una potencia de 2

9. Calcular el cociente y el resto de la división de a por b en los casos

i) $a = 133, \quad b = -14$
ii) $a = 13, \quad b = 111$
iii) $a = 3b + 7, \quad b \neq 0$
iv) $a = b^2 - 6, \quad b \neq 0$
v) $a = n^2 + 5, \quad b = n + 2$ ($n \in \mathbb{N}$)
vi) $a = n + 3, \quad b = n^2 + 1$ ($n \in \mathbb{N}$)

10. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de

i) la división de $a^2 - 3a + 11$ por 18
ii) la división de a por 3
iii) la división de $4a + 1$ por 9
iv) la división de $a^2 + 7$ por 36
v) la división de $7a^2 + 12$ por 28
vi) la división de $1 - 3a$ por 27

11. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales el resto de la división de $n^3 + 4n + 5$ por $n^2 + 1$ es $n - 1$

12. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros. Probar que existen r, s tales que $\displaystyle\sum_{j=0}^{s} a_{r+j}$ es divisible por n.
(Sugerencia: Considerar los n números a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, …, $a_1 + a_2 + \cdots a_n$ y probar que si ninguno de ellos es divisible por n entonces necesariamente dos de ellos tienen el mismo resto en la división por n.)

13. i) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \equiv 22\ (14)$. Hallar el resto de dividir a a por 2, por 7 y por 14
ii) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \equiv 13\ (5)$. Hallar el resto de dividir a $33a^3 + 3a^2 - 197a + 2$ por 5
iii) Hallar, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de la división de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i . i!$ por 36

14. i) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a^2 \equiv 3\ (11)$
ii) Probar que no existe ningún entero a tal que $a^3 \equiv -3\ (13)$
iii) Probar que $a^2 \equiv -1\ (5) \iff a \equiv 2\ (5)$ ó $a \equiv 3\ (5)$
iv) Probar que $a^7 \equiv a\ (7)$ para todo $a \in \mathbb{Z}$
v) Probar que $3 \mid a^2 + b^2 \iff 3 \mid a$ y $3 \mid b$
vi) Probar que $7 \mid a^2 + b^2 \iff 7 \mid a$ y $7 \mid b$
vii) Probar que $5 \mid a^2 + b^2 \iff a \equiv 2b\ (5)$ ó $a \equiv 3b\ (5)$
viii) Probar que $5 \mid a^2 + b^2 + 1 \Longrightarrow 5 \mid a$ ó $5 \mid b$
ix) Probar que cualesquiera sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a^2 + b^2 + c^2 + 1$ no es divisible por 8

15. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a^2 + b^2 = c^2$. Probar que

i) $3 \mid a$ ó $3 \mid b$
ii) $5 \mid a$ ó $5 \mid b$ ó $5 \mid c$
iii) $4 \mid a$ ó $4 \mid b$

16. Enunciar y demostrar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 8, 9 y 11

17. Sea a un entero impar que no es divisible por 5

i) Probar que $a^4 \equiv 1\ (10)$

ii) Probar que a y a^{45321} tienen el mismo resto en la división por 10

18. i) Probar que $2^{5n} \equiv 1\ (31)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

ii) Hallar el resto de la división de 2^{51833} por 31

iii) Sea $k \in \mathbb{N}$. Sabiendo que $2^k \equiv 39\ (31)$, hallar el resto de la división de k por 5

iv) Hallar el resto de la división de $43.2^{163} + 11.5^{221} + 61^{999}$ por 31

19. i) Sea a un entero impar. Probar que $2^{n+2} \mid a^{2^n} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

ii) Hallar el resto de la división de 5^{2267} por 32

20. Probar que existen infinitos primos congruentes a 3 módulo 4

Sugerencia: probar primero que un número congruente a 3 módulo 4 distinto de 1 y -1 necesariamente es divisible por un primo congruente a 3 módulo 4. Luego probar que si existieran finitos primos congruentes a 3 módulo 4, digamos $p_1, p_2, \dots, p_n$, entonces $a = -1 + 4.\prod_{i=1}^{n} p_i$ sería un entero distinto de 1 y -1 que no es divisible por ningún primo congruente a 3 módulo 4.

21. En cada uno de los siguientes casos calcular el máximo común divisor entre a y b y escribirlo como combinación lineal entera de a y b

i) $a = 2532,\ b = 63$

ii) $a = 5335,\ b = 110$

iii) $a = 131,\ b = 23$

iv) $a = n^2 + 1,\ b = n + 2\ (n \in \mathbb{N})$

22. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Sabiendo que el resto de dividir a a por b es 27 y que el resto de dividir b por 27 es 21, calcular $(a : b)$.

23. Sea $a \in \mathbb{Z}$, $a > 1$ y sean $n, m \in \mathbb{N}$. Probar que $(a^n - 1 : a^m - 1) = a^{(n:m)} - 1$

Sugerencia: probar que si r es el resto de la división de n por m entonces el resto de la división de $a^n - 1$ por $a^m - 1$ es $a^r - 1$

24. Sea $a \in \mathbb{Z}$.

i) Probar que $(5a + 8 : 7a + 3) = 1$ o 41

ii) Probar que $(2a^2 + 3a - 1 : 5a + 6) = 1$ o 43

25. i) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{b+4}{a} + \dfrac{5}{b} \in \mathbb{Z}$

ii) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{9a}{b} + \dfrac{7a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$

iii) Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $\dfrac{2a+3}{a+1} + \dfrac{a+2}{4} \in \mathbb{Z}$

26. Sean p y q primos positivos distintos y sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que si $p.q \mid a^n$ entonces $p.q \mid a$

27. i) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c > 0$. Probar que $(c.a : c.b) = c.(a : b)$

ii) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Probar que

(a) si $(a : b) = 1$ entonces $(a^n : b^n) = 1$

(b) si $(a : b) = d$ entonces $(a^n : b^n) = d^n$

(c) si $a^n \mid b^n$ entonces $a \mid b$

28. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que

i) si $(a : b) = 1$ entonces $(7a - 3b : 2a - b) = 1$
ii) si $(a : b) = 1$ entonces $(2a - 3b : 5a + 2b) = 1$ ó 19
iii) si $(a : b) = 2$ entonces $(5a - 3b : 4a + b) = 2$ ó 34

29. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que

i) $(2^n + 7^n : 2^n - 7^n) = 1$
ii) $(2^n + 5^{n+1} : 2^{n+1} + 5^n) = 3$ ó 9
iii) $(3^n + 5^{n+1} : 3^{n+1} + 5^n) = 2$ ó 14

30. i) Determinar cuántos divisores positivos tienen 9000, $15^4 . 42^3 . 56^5$, $10^n . 11^{n+1}$ y $10^n . 8^{n+1}$
ii) Hallar la suma de los divisores positivos de $2^4 \cdot 5^{123}$ y de $7^{435} \cdot 8^{23}$

31. Hallar el menor número natural n tal que $6552.n$ sea un cuadrado.

32. Decidir si existen enteros a y b no nulos que satisfagan

i) $a^2 = 8b^2$
ii) $a^2 = 3b^3$
iii) $7a^2 = 11b^2$
iv) $a^2 = 39b^2$

33. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que si p es un primo positivo entonces $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$

34. i) Calcular la máxima potencia de 3 que divide a 77!
ii) Calcular la máxima potencia de 9 que divide a 77!
iii) Calcular la máxima potencia de 20 que divide a 81!
iv) Calcular la máxima potencia de 24 que divide a 81!
v) Determinar en cuántos ceros termina el desarrollo decimal de 81!

35. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ con a y b coprimos. Probar que $(a : b.c) = (a : c)$ y que, si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$

i) usando el teorema fundamental de la aritmética
ii) sin usar el teorema fundamental de la aritmética

36. Calcular $(18^n - 1 : 1292)$ para cada $n \in \mathbb{N}$

37. i) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a : 25) = 5$. Calcular $(a^4 + 3a + 5^{232} : 150)$
ii) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 2$. Calcular $(a^2 + b^2 : 84)$
iii) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 3$. Calcular $(a^2.b : 9a + 9b)$

38. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $((a^2 + 3)(7a - 2) : 15) = 5$

39. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) $(n : 945) = 63$, $(n : 1176) = 84$ y $n \leq 2800$
ii) $(n : 1260) = 70$ y n tiene 30 divisores positivos
iii) $[n : 130] = 260$

40. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 10$ y $[\,a : b\,] = 1500$