

# Álgebra 1

## Práctica 5 - Enteros (segunda parte)

- Hallar el desarrollo en base 2 de 1365, 2800,  $3 \cdot 2^{13}$  y  $13 \cdot 2^n + 5 \cdot 2^{n-1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).
  - Hallar el desarrollo en base 7 de 8575
  - Hallar el desarrollo en base 16 de 2800
- Sea  $a$  un entero. Probar que si el desarrollo en base 10 de  $a$  termina en  $n$  ceros entonces el desarrollo en base 5 de  $a$  termina en por lo menos  $n$  ceros.
  - Determinar en cuántos ceros termina el desarrollo en base 16 del número 20!
- Determinar, cuando existan, todos los  $a, b \in \mathbb{Z}$  que satisfacen
  - $5a + 8b = 3$
  - $7a + 11b = 10$
  - $24a + 14b = 7$
  - $20a + 16b = 36$
  - $39a - 24b = 6$
  - $1555a - 300b = 11$
- Si se sabe que cada unidad de un cierto producto A cuesta 39 pesos y que cada unidad de un cierto producto B cuesta 48 pesos, ¿cuántas unidades de cada producto se pueden comprar con 135 pesos?
- Hallar, cuando existan, todas las soluciones de las siguientes ecuaciones de congruencia
  - $17X \equiv 3 \pmod{11}$
  - $56X \equiv 28 \pmod{35}$
  - $56X \equiv 2 \pmod{884}$
  - $33X \equiv 27 \pmod{45}$
- Hallar el resto de la división de un entero  $a$  por 18, sabiendo que el resto de la división de  $7a$  por 18 es 5.
- Hallar todos los  $a \in \mathbb{Z}$  tales que  $(7a + 1 : 5a + 4) \neq 1$
  - Hallar todos los  $a \in \mathbb{Z}$  tales que  $(2a^2 + 3a - 1 : 5a + 6) \neq 1$
- Hallar todos los enteros  $a$  que satisfacen simultáneamente:
$$\begin{cases} a \equiv 0 & (8) \\ a \equiv 2 & (5) \\ a \equiv 1 & (21) \end{cases} \quad \begin{cases} a \equiv 3 & (10) \\ a \equiv 2 & (7) \\ a \equiv 5 & (9) \end{cases}$$
- Determinar si existe algún entero  $a$  que satisfaga simultáneamente:
$$\begin{cases} a \equiv 1 & (6) \\ a \equiv 2 & (20) \\ a \equiv 3 & (9) \end{cases} \quad \begin{cases} a \equiv 1 & (12) \\ a \equiv 7 & (10) \\ a \equiv 4 & (9) \end{cases}$$
y, en caso afirmativo, hallarlos todos.
- Sabiendo que los restos de la división de un entero  $a$  por 3, 5 y 8 son 2, 3 y 5 respectivamente, hallar el resto de la división de  $a$  por 120.
- ¿Existe algún entero  $a$  cuyo resto en la división por 15 sea 2 y cuyo resto en la división por 18 sea 8?
  - ¿Existe algún entero  $a$  cuyo resto en la división por 15 sea 13 y cuyo resto en la división por 35 sea 22?
- Hallar el menor entero positivo  $a$  que satisfaga simultáneamente las condiciones siguientes:

- el resto de la división de  $a$  por 21 es 13.
  - el resto de la división de  $6a$  por 15 es 9.
13. Hallar un entero  $a$  entre 60 y 90 tal que el resto de la división de  $2a$  por 3 sea 1 y el resto de la división de  $7a$  por 10 sea 8.
14. Hallar el resto de la división de  $a$  por  $p$  en los casos
- i)  $a = 33^{1427}$ ,  $p = 5$
  - ii)  $a = 71^{22283}$ ,  $p = 11$
  - iii)  $a = 5 \cdot 7^{2451} + 3 \cdot 65^{2345} - 23 \cdot 8^{138}$ ,  $p = 13$
15. Hallar todos los primos positivos  $p$  tales que  $p \mid 2^p + 5$
16. i) Resolver la ecuación de congruencia  $2^{13}X \equiv 5 \pmod{11}$   
ii) Resolver la ecuación de congruencia  $2^{94}X \equiv 7 \pmod{97}$
17. Sean  $p$  y  $q$  dos primos positivos distintos. Probar que si  $a$  es un entero coprimo con  $pq$  entonces  $p \cdot q \mid a^{(p-1)(q-1)} - 1$
18. Probar que si  $a$  es un entero coprimo con 561 entonces  $561 \mid a^{560} - 1$
19. Probar que, para todo  $a \in \mathbb{Z}$ ,
- i)  $728 \mid a^{27} - a^3$
  - ii)  $880 \mid a^{64} - a^4$
  - iii)  $\frac{2a^7}{35} + \frac{a}{7} - \frac{a^3}{5} \in \mathbb{Z}$
20. Hallar todos los  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $7^n \equiv 5 \pmod{13}$
21. Hallar todos los  $a \in \mathbb{Z}$  tales que  $a^{236} \equiv 6 \pmod{19}$
22. i) Probar que  $(2^n + 7^{n+1} : 2^{n+1} + 7^n) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$   
ii) Hallar todos los  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $(3^{n+1} + 4^n : 4^{n+1} - 3^n) \neq 1$
23. Sea  $p$  un primo,  $p > 2$  y sea  $a \in \mathbb{Z}$  tal que  $p \nmid a$ . Probar que  $p^n \mid a^{(p-1)p^{n-1}} - 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Comparar con el ejercicio 17. i) de la práctica 4.  
Sugerencia: En el paso inductivo notar que  $a^{(p-1)p^n} - 1 = (a^{(p-1)p^{n-1}})^p - 1^p$  y usar el ejercicio 8 de la práctica 2
24. i) Hallar el resto de la división de  $3^{3603}$  por  $5^3$   
ii) Hallar el resto de la división de  $7^{542}$  por 81
25. Calcular el resto de la división de  $\sum_{i=1}^{1759} i^{42}$  por 56
26. i) Hallar el resto de la división de  $3 \cdot 7^{135} + 24^{78} + 11^{222}$  por 70  
ii) Hallar el resto de la división de  $3^{385}$  por 400  
iii) Hallar todos los  $a \in \mathbb{Z}$  tales que  $539 \mid 3^{253}a + 5^{44}$
27. Hallar el resto de la división de  $2^{2^n}$  por 13 para cada  $n \in \mathbb{N}$
28. Hallar todos los  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $3^n \equiv 53 \pmod{77}$

29. Hallar todos los divisores positivos de  $25^{70}$  que sean congruentes a 2 módulo 9 y a 3 módulo 11.
30. i) Probar que  $(3a^6 - 3 : 5a^6 + 2) = 1$  ó 7. Hallar todos los  $a \in \mathbb{Z}$  para los cuales vale 7  
ii) Hallar todos los  $a \in \mathbb{Z}$  tales que  $(3a^7 - 3 : 5a^7 + 2) = 7$   
iii) Hallar todos los  $a \in \mathbb{Z}$  tales que  $(11a^6 + 1 : 90) = 5$   
iv) Sea  $a \in \mathbb{Z}$  tal que  $(9a^{25} + 10 : 280) = 35$ . Hallar el resto de la división de  $a$  por 70  
v) Hallar todos los  $a \in \mathbb{Z}$  tales que  $(3a^{98} - 5a^{50} + 4 : 140a) = 14$   
vi) Hallar todos los enteros positivos  $a$  tales que  $(4a^{62} - a : 11a) \neq a$   
vii) Para cada entero  $a$  hallar  $(a^{18} + 413 : 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3)$
31. Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $a \in \mathbb{Z}$  tales que  $(5^{n+1} - 9^n : 9^{n+1} + 39a5^n) = 22$ . Hallar el resto de la división de  $a$  por 44.
32. Escribir las tablas de suma y producto en  $\mathbb{Z}_n$  para  $n = 2, 3, 4$  y 5.
33. Se dice que un elemento  $a \in \mathbb{Z}_n$  es un *cuadrado* si existe  $b \in \mathbb{Z}_n$  tal que  $a = b^2$  en  $\mathbb{Z}_n$   
i) Calcular los cuadrados de  $\mathbb{Z}_n$  para  $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11$  y 13  
ii) Probar que si  $a$  y  $b$  son cuadrados en  $\mathbb{Z}_n$ ,  $ab$  es un cuadrado.  
iii) Probar que si  $a$  es un elemento inversible de  $\mathbb{Z}_n$  que es un cuadrado,  $a^{-1}$  es un cuadrado.  
iv) Sea  $p$  primo positivo. Probar que, en  $\mathbb{Z}_p$ , si  $a^2 = b^2$  entonces  $a = b$  ó  $a = -b$   
v) Sea  $p$  primo positivo impar. Probar que en  $\mathbb{Z}_p$  hay exactamente  $\frac{(p-1)}{2}$  cuadrados no nulos.  
vi) Sea  $p$  primo positivo impar. Probar que, en  $\mathbb{Z}_{2p}$ , si  $a^2 = b^2$  entonces  $a = b$  ó  $a = -b$   
vii) Probar que si  $n$  es un natural compuesto e impar, existen  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{Z}_n$  con  $a^2 = b^2$  y  $a \neq \pm b$
34. Sea  $p$  primo positivo.  
i) Probar que si  $k < p$  es un natural,  $p$  divide a  $\binom{p}{k}$ . Dar algunos contraejemplos si  $p$  no es primo.  
ii) Deducir del ítem anterior que, en  $\mathbb{Z}_p$ , vale  $(a + b)^p = a^p + b^p$   
iii) ¿Sigue valiendo la propiedad del ítem ii) en  $\mathbb{Z}_n$  si  $n$  no es primo?
35. Para cada una de las siguientes ecuaciones, determinar si tiene soluciones y, en caso afirmativo, hallarlas todas:  
i)  $5 \cdot x = 4$  en  $\mathbb{Z}_{14}$ .  
ii)  $6 \cdot x = 10$  en  $\mathbb{Z}_{21}$ .  
iii)  $20 \cdot x = 12$  en  $\mathbb{Z}_{24}$ .