Examen Único - Recuperatorio

Taller de Cálculo Avanzado - Verano 2011 - 18 de Marzo de 2011

Nombre y Apellido	1	2	3	4	Nota

1. i) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado no vacío. Definimos el diámetro de A por

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{\|x-y\| : x, y \in A\}.$$

Demostrar que para cualquier conjunto no vacío $A \in \mathbb{R}^n$ acotado, $\overline{A}$ es acotado y se tiene que $\operatorname{diam}(\overline{A}) = \operatorname{diam}(A)$.

ii) Dados A, B dos conjuntos no vacíos en $\mathbb{R}^n$, se define la distancia entre ellos por

$$d(A,B) = \operatorname{ínf}\{\|a-b\| : a \in A, b \in B\}$$

Probar que si C es acotado, entonces

$$d(A,B) \leq d(A,C) + \operatorname{diam}(C) + d(C,B)$$

---

2. i) Demostrar que $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $x_n \to x$, existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$, $x_n \in U$.

ii) Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto y A' el conjunto de los puntos de acumulación de A. Demostrar que A' es cerrado.

---

3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función.

i) Probar que f es continua si y sólo si valen las siguientes afirmaciones:

a) $f^{-1}((\alpha, +\infty))$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) $f^{-1}((-\infty, \beta))$ es abierto para todo $\beta \in \mathbb{R}$.

ii) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpla *a*) pero no cumpla *b*).

---

4. Consideramos la siguiente función F definida por medio de una serie:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$$

a) Demostrar que la serie converge si y sólo si $s \in (1, +\infty)$.

b) Demostrar que la serie converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset (1, +\infty)$. Deducir que la función F definida como la suma de la serie es continua en $(1, +\infty)$.

c) ¿Es uniforme la convergencia en $(1, +\infty)$?