Examen único

Taller de Cálculo Avanzado - Verano 2011 - 11 de Marzo de 2011

Nombre y Apellido	1	2	3	4	Nota

1. Si A y B son subconjuntos de $\mathbf{R}^n$ y $x \in \mathbf{R}^n$ definimos $d_A(x) = \inf_{a \in A} d(a, x)$ y $d(A, B) = \inf_{a \in A} d_B(a)$.

   a) Probar que, dado $A \subset \mathbf{R}^n$ la función $d_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es Lipschitz con constante 1. Deducir que d_A es una función continua.

   Sean $K \subset \mathbf{R}^n$ compacto y $C \subset \mathbf{R}^n$ cerrado, ambos no vacíos.

   b) Usando el resultado del punto anterior, demostrar que existe un $x \in K$ tal que $d_C(x) = d(C, K)$; es decir, probar que existe un punto en el compacto que realiza la distancia al cerrado.

---

2. Sean $K \subset \mathbf{R}^n$ compacto y $C \subset \mathbf{R}^n$ cerrado, ambos no vacíos, tales que $K \cap C = \emptyset$ y sea $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ uniformemente continua en C y continua en K. Usando los resultados del ejercicio anterior demostrar que

   a) $d(K, C) > 0$;

   b) f es uniformemente continua en $K \cup C$.

---

3. Se dice que una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de números reales es de variación acotada si converge la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|.$$

   a) Probar que si $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ es de variación acotada, entonces converge.

   b) Probar que si $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ es una sucesión convergente, entonces existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ que es de variación acotada.

   c) Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: si $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ es una sucesión de variación acotada tal que $a_n \to 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

---

4. Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}$ una función monótona creciente, y $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} : [a, b] \to \mathbf{R}$ una sucesión de funciones acotadas e integrables con respecto a $\alpha(x)$ [usando la definición de la integral de Riemann-Stieltjes vista en clase], que converge uniformemente a $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. Probar que entonces f es integrable respecto a α en $[a, b]$ y que vale
$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$