

Práctica 4

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Decidir en cada caso si corresponde \subseteq, \supseteq ó $=$ y probarlo.

$$\begin{array}{llll}
 (i) & f(A \cup B) & \dots\dots & f(A) \cup f(B) \\
 (ii) & f^{-1}(X \cup Y) & \dots\dots & f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \\
 (iii) & f(A \cap B) & \dots\dots & f(A) \cap f(B) \\
 (iv) & f^{-1}(X \cap Y) & \dots\dots & f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\
 (v) & f(\mathbf{C}A) & \dots\dots & \mathbf{C}(f(A)) \\
 (vi) & f^{-1}(\mathbf{C}X) & \dots\dots & \mathbf{C}(f^{-1}(X))
 \end{array}$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$. Demostrar que f es una función constante. Deducir que dos funciones continuas que coinciden sobre \mathbb{Q} son la misma función.

3. Hallar todos los puntos donde la función f es continua, siendo

(a) $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ coprimos y } b > 0 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

4. Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua. Demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. *Sugerencia.* Considerar la función $x - f(x)$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que son equivalentes:

- (a) f es continua (en todo \mathbb{R}).
- (b) $f^{-1}(O)$ es abierto para todo $O \subseteq \mathbb{R}$ abierto.
- (c) $f^{-1}(F)$ es cerrado para todo $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado.

6. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.

7. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones siguientes:

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = |x|$.

- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = x^2$.
- (c) $f : (r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \sqrt{x}$, con $r = 0$ y con $r > 0$.
- (d) $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.
- (e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- (f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = d(x, S)$, donde $S \subseteq \mathbb{R}$.
8. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto arbitrario y sean $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas.
- (a) Probar que $f + g$ es uniformemente continua.
- (b) Mostrar con un ejemplo que $f \cdot g$ no necesariamente es uniformemente continua, aún si alguna de las funciones f ó g es acotada.
- (c) Probar que si $h : f(S) \rightarrow \mathbb{R}$ es otra función uniformemente continua entonces $h \circ f : S \rightarrow \mathbb{R}$ también lo es.
9. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$. Probar que f es uniformemente continua en $[a, c]$.
- ¿Es cierto que si f es una función uniformemente continua sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y también sobre un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$, entonces lo es en $A \cup B$?
10. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 y α números reales. Se dice que f es localmente Lipschitz de orden α en el punto x_0 si existen $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha \quad \text{para todo } x \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

(también se llama a veces localmente Hölder continua de orden α).

M se llama la constante de Lipschitz de f . Cuando el orden $\alpha = 1$ decimos, simplemente, que f es Lipschitz.

- (a) Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x_0 entonces f es continua en x_0 .
- (b) Mostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en x_0 , entonces es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$.
11. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Demostrar que f no es Lipschitz pero sin embargo f es uniformemente continua (en particular “unif. cont. $\not\Rightarrow$ Lipschitz”).
12. Sea $S \subset \mathbb{R}$ y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz con constante igual a $M < 1$. Demostrar que si S es cerrado, y $f(S) \subseteq S$ entonces existe $y \in S$ tal que $f(y) = y$, en otras palabras, f tiene un punto fijo.

Sugerencia. Considerar la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en S construída recursivamente así: $x_1 \in S$ cualquiera, si x_n está definido se toma $x_{n+1} := f(x_n)$, en otras palabras, $x_{n+1} := f^{(n)}(x_1)$. Demostrar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy; tomar $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone S cerrado.

13. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2}$. Demostrar que f es Lipschitz con $M = 1$ pero que f no tiene puntos fijos.

Sugerencia. Considerar la función $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = |x - f(x)|$.

14. Considérese el conjunto $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Dado que este conjunto es numerable e infinito se puede escribir: $\mathbb{Q} \cap (0, 1) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Se define $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ de la manera siguiente:

$$f(x) = \sum_{n \in \Omega_x} \frac{1}{2^n}$$

donde $\Omega_x = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x\}$.

Demostrar que:

- (a) f está bien definida.
 - (b) f es una función monótona creciente.
 - (c) f es discontinua en todo punto del conjunto $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$; más aún: para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f(x_n+) - f(x_n-) = \frac{1}{2^n} > 0$.
 - (d) f es continua a izquierda en todo $x \in (0, 1)$; es decir, para todo $x \in (0, 1)$ vale que $f(x-) = f(x)$.
 - (e) f es continua en todo punto del conjunto $(0, 1) - \mathbb{Q}$.
15. En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en el conjunto $S \subset \mathbb{R}$:
- (a) $f_n(x) = x^n$, $S = (-1, 1]$.
 - (b) $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}$, $S = (1, +\infty)$.
 - (c) $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$, $S = [0, 1]$.
16. (a) Probar que la sucesión del ejercicio 15(a) converge uniformemente en $T = (0, 1/2)$, pero en $S = (-1, 1]$ converge puntualmente a una función que no es continua.
- (b) Probar que la sucesión del ejercicio 15(b) converge uniformemente en $T = [2, 5]$.
17. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos indicados:

- (a) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, sobre todo \mathbb{R} .
- (b) $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$, sobre todo \mathbb{R} .
- (c) $f_n(x) = \frac{n}{n+1}x$, sobre todo \mathbb{R} .
- (d) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ ó } x = 0 \\ b + \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{a}{b}, b > 0 \text{ y } (a : b) = 1 \end{cases}$, sobre $[0, 1]$.

18. Probar que la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$$

converge puntualmente en \mathbb{R} a una función continua, pero la convergencia no es uniforme.

19. Sea $S \subset \mathbb{R}$ y sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que si f_n es acotada para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces vale:

- (a) f es acotada.
- (b) Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in S$ y todo $n \in \mathbb{N}$ (en otras palabras, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada).

20. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = n^2x(1-x)^n.$$

- (a) Probar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función cero en el intervalo $[0, 1]$.
 - (b) Verificar que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ pero que el límite no puede ‘pasar adentro de la integral’. Es decir, ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx$
21. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones derivables definidas sobre el intervalo $[a, b]$. Supongamos que $\{f'_n\}$ converge uniformemente en $[a, b]$. Si existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $\{f_n(x_0)\}$ converge, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a, b]$.

22. Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge uniformemente, entonces $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero.

23. Considerar la función $f(x) = \sum \frac{1}{x^2+n^2}$.

- (a) Mostrar que f es continua en \mathbb{R} .
- (b) ¿Es f derivable? Si lo es, ¿es h' continua?

24. Considerar la serie

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Hallar el dominio de definición de f y estudiar su continuidad y diferenciabilidad. *Sugerencia.* Para analizar la continuidad en $x = 1$, puede ser útil tener primero una fórmula para f' .

25. Hallar los desarrollos en serie de potencias para las siguientes funciones, y determinar los radios de convergencia.

- (a) $\frac{1}{1+x}$.
- (b) $\frac{1}{(1+x)^2}$.
- (c) $\frac{x}{(1+x^2)^2}$.