

## Práctica No. 3

1. Una función  $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  se llama una norma en  $\mathbb{R}^n$  si se cumple que:

- $N(v) = 0 \Leftrightarrow v = (0, \dots, 0)$ .
- $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$ , para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$  para todo  $v, w \in \mathbb{R}^n$ .

Sean  $\| (x_1, \dots, x_n) \|_1 := \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|$  y  $\| (x_1, \dots, x_n) \|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ .

Demostrar que las funciones  $\| * \|_1$  y  $\| * \|_\infty$  son normas.

2. Una función  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  se llama una distancia en  $\mathbb{R}^n$  si se cumple:

- $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$ .
- $d(v, w) = d(w, v)$ , para todo  $v, w \in \mathbb{R}^n$ .
- $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$ , para todo  $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ .

Demostrar que si  $N$  es una norma en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $d(v, w) := N(v - w)$  es una distancia en  $\mathbb{R}^n$ .

3. Estudiar cuáles propiedades (abierto, cerrado, acotado) verifica cada uno de los conjuntos siguientes:

- (a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 1\}$       (b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$   
 (c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0\}$       (d)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 > 4\}$   
 (e)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy > z\}$

4. Sean  $S, T$  subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Demostrar las propiedades siguientes:

- (a)  $S^\circ = \{p \in \mathbb{R}^n / \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B(p, \varepsilon) \subseteq S\}$ .  
 (b) Si  $S \subseteq T$  entonces  $S^\circ \subseteq T^\circ$ .  
 (c)  $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$ . ¿Se puede generalizar esta igualdad a una intersección infinita?  
 (d)  $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$ . ¿Vale la igualdad?  
 (e)  $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$ . ¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?

- (f)  $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$ . ¿Vale la igualdad?
- (g)  $(\mathbb{R}^n - S)^\circ = \mathbb{R}^n - \overline{S}$ .
5. En cada uno de los siguientes casos hallar  $S^\circ$ ,  $\overline{S}$  y  $\partial S$ .
- (a)  $S = [0, 1]$       (b)  $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$       (c)  $S = [-1, 0) \cup \{1\}$
- (d)  $S = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$       (e)  $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$       (f)  $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$
6. Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$ .
- (a) Demostrar que  $S$  es abierto si y solo si es disjunto con  $\partial S$ .
- (b) Demostrar que  $S$  es cerrado si y solo si  $\partial S \subset S$ .
7. Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$ , demostrar que  $p \in \partial S$  si y sólo si todo entorno de  $p$  contiene un punto en  $S$  y un punto que no está en  $S$ .
8. Si  $S \subset \mathbb{R}^n$  notamos con  $S'$  al conjunto de todos los puntos de acumulación de  $S$ .
- (a) Hallar  $S'$  para cada uno de los conjuntos del ejercicio 5.
- (b) *Un punto  $p \in S$  se llama un punto aislado de  $S$  si y sólo si existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(p, \varepsilon) \cap S = \{p\}$ .* Demostrar que  $\overline{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$ .
9. Hallar los puntos de acumulación del conjunto  $S = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}), \text{ con } n, m \in \mathbb{N}\}$ . Hallar la adherencia  $\overline{S}$ .
10. Hallar todos los subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}$  que son a la vez abiertos y cerrados.
11. Probar que todo conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}$  tiene máximo y mínimo. ¿Es cierta la recíproca?
12. Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión acotada y sea  $A$  el conjunto de sus puntos límites.
- (a) Probar que  $A$  es compacto.
- (b) Probar que el máximo y el mínimo de  $A$  son  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  y  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ , respectivamente.
13. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , se considera el intervalo abierto  $\mathfrak{S}_n := (\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$ . Demostrar que  $(0, 1) = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{S}_n$ . ¿Existe un conjunto *finito*  $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$  tal que  $(0, 1) = \bigcup_{n \in \mathcal{F}} \mathfrak{S}_n$ ? Justificar. ¿Qué puede decir sobre la compacidad del conjunto  $(0, 1)$ ?

14. Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$ , demostrar que  $S$  es un conjunto compacto si y sólo si toda sucesión contenida en  $S$  contiene una subsucesión que converge a un punto de  $S$ .
15. Sean  $S, T \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos compactos. Demostrar que  $S \cup T$  y  $S \cap T$  son compactos. ¿Qué ocurre si se toman uniones o intersecciones infinitas?
16. Sea  $U_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x, y) - (0, n)\| < n\}$ . Demostrar que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$  es el semiplano superior abierto.
17. Sea  $S = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} / n, m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$  (cf. ejercicio 4 (f) de la Práctica 1).  
Demostrar que los puntos de acumulación de  $S$  son los puntos de la forma  $\frac{1}{n}$  y el 0. ¿El conjunto  $S \cup \{0\}$  es compacto?
-