Práctica 2

1. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+3}$.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$.

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$.

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$.

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}$.

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$.

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$

2. Hallar la suma de las siguientes series:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ *Sugerencia:* Desarrollar en fracciones simples.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$

3. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-4n+2}{n!}$.

   Sugerencia: descomponer el término general en la forma

$$\frac{3n^2-4n+2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$$

4. Determinar cuántos primeros términos hay que tomar en las series siguientes para que su suma difiera no más del $0,01\%$ de la suma de las series correspondientes:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}. \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}. \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

5. Demostrar que la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{\alpha}}$$

   converge cuando $\alpha > 1$ y diverge cuando $\alpha \leq 1$.

6. i) Demostrar la desigualdad

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

   Sugerencia: Recordar la demostración del criterio de comparación con una integral impropia.

   ii) Si $r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$, demostrar que r_n converge.

   Nota: El límite de r_n se conoce como la *constante de Euler-Mascheroni*. Su valor aproximado es $0.57721\ldots$.

7. Por comparación con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, establecer el *criterio de Raabe*: la serie de términos positivos $\sum a_n$ converge o diverge según

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

sea mayor que $1+\varepsilon$ o menor que $1-\varepsilon$ para todo n suficientemente grande, y para algún $\varepsilon > 0$ independiente de n.

8. Probar el siguiente teorema de Abel: Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números positivos, y si $\sum a_n$ converge, entonces $na_n \to 0$ si $n \to \infty$.

   Sug.: $na_{2n} \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} \to 0$ si $n \to \infty$, y similarmente para na_{2n+1}.

9. Probar el siguiente criterio de convergencia (condensación de Cauchy): Sea b_n una sucesión decreciente de números no negativos. Entonces la serie $\sum b_n$ converge si y sólo si la serie $\sum 2^n b_{2^n}$ converge.

10. Decir si las siguientes series convergen condicional o absolutamente:

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$.

    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-2n-1}{n!}$

11. (a) Mostrar que si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum a_n^2$ converge. ¿Vale este resultado si $\sum a_n$ converge sólo condicionalmente?

    (b) ¿Si $\sum a_n$ converge y $a_n \geq 0$, se puede concluir algo de $\sum \sqrt{a_n}$?

12. Hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales convergen las series:

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

    (d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin(\frac{x}{3^n})$

    (e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$

    (f) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$

13. Sea $|x| < 1$. Mostrar que

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

14. Si se define la función exponencial $\operatorname{Exp}(x)$ por su serie de potencias

$$\operatorname{Exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

probar (utilizando el producto de Cauchy de series) que $\operatorname{Exp}(x+y) = \operatorname{Exp}(x) \cdot \operatorname{Exp}(y)$.

15. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series convergentes (no necesariamente absolutamente), ¿es la serie producto (de Cauchy) convergente?

    Sugerencia. Considerar $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}, n \geq 1$.