

Ejercicios para entregar

Práctica 4

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

Demostrar que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente y encontrar su límite.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $f_n : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n x^j = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n$$

Se sabe que f_n converge puntualmente a la función $g(x) = \frac{1}{1-x}$.

- a) Demostrar que la convergencia es uniforme sobre todo compacto K contenido en $(-1, 1)$.
- b) Demostrar que f_n no converge uniformemente a g sobre el intervalo $(-1, 1)$.
Puede ser útil usar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.