Ejercicios para entregar

Práctica 2

1. Considerar la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna (cuando existe) el valor de la suma $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$. Describir el dominio de esta función y verificar que en ese dominio vale

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

Notar que existe el $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$ pero la serie no converge en $x = 1$.

2. Probar el siguiente teorema, que muestra bajo qué hipótesis adicionales se puede concluir la convergencia de una serie de potencias en el extremo del intervalo de convergencia.

Teorema. *Sea an una sucesión tal que* $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. *Supongamos además que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *tiene radio de convergencia 1. Definamos en el intervalo* $(-1, 1)$ *la función* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Vale entonces que si* $\lim_{x\to 1^-} f(x) = s$ *entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

Sugerencias:

a) Sea $S_r = \sum_{n=0}^{r} a_n$ la suma parcial de la serie de potencias en $x = 1$. Probar que $\lim_{r\to\infty} S_r - f(1 - \frac{1}{r}) = 0$

b) Para probar *a*), descomponer la serie que define a $f(1 - \frac{1}{r})$ como

$$f\left(1 - \frac{1}{r}\right) = \sum_{n=0}^{r} a_n \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n + \sum_{n=r+1}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n$$

c) Usar la siguiente identidad $1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$ y algún valor de x adecuado para acotar

$$\left| S_r - \sum_{n=0}^{r} a_n \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n \right|$$

(puede resultar útil el ejercicio 21 de la práctica 1)

d) Acotar el término de la cola de la serie por alguna geométrica conveniente

$$\left| \sum_{n=r+1}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n \right| \leq ??$$