MATEMATICA 2 - Verano de 2011

Práctica 7 - Espacios vectoriales con producto interno

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

i) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \Phi(x,y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$

ii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \Phi(x,y) = x_1.y_1 + x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 - 3.x_1.y_2$

iii) $\Phi : K^2 \times K^2 \to K,\ \Phi(x,y) = 2.x_1.y_1 + x_2.y_2 - x_1.y_2 - x_2.y_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

iv) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \Phi(x,y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_2.\overline{y}_2 - x_1.\overline{y}_2 - x_2.\overline{y}_1$

v) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, \Phi(x,y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + (1+i).x_1.\overline{y}_2 + (1+i).x_2.\overline{y}_1 + 3.x_2.\overline{y}_2$

vi) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \Phi(x,y) = x_1.\overline{y}_1 - i.x_1\overline{y}_2 + i.x_2\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2$

vii) $\Phi : K^3 \times K^3 \to K,\ \Phi(x,y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_3.\overline{y}_3 - x_1.\overline{y}_3 - x_3.\overline{y}_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 2. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

i) $\langle\, ,\rangle : K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K,\ \langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

ii) $\langle\, ,\rangle : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R},\ \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x).g(x)\,dx$

iii) $\langle\, ,\rangle : K^n \times K^n \to K,\ \langle x, y\rangle = x\,Q^*Q\,\overline{y}^t$, donde $Q \in K^{n\times n}$ es una matriz inversible, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 3. Restringir el producto interno del item ii) del ejercicio anterior a $\mathbb{R}_n[X]$ y calcular su matriz en la base $B = \{1, X, \dots, X^n\}$.

Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes casos, hallar un producto interno en V para el cual la base B resulte ortonormal.

i) $V = \mathbb{C}^2$, $B = \{(1, i), (-1, i)\}$

ii) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

Ejercicio 5.

i) Encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal para el producto interno definido en el ítem iii) del Ejercicio 1 para $K = \mathbb{R}$.

ii) Encontrar una base de $\mathbb{C}^2$ que sea ortonormal para el producto interno definido en el ítem vi) del Ejercicio 1.

Ejercicio 6.

i) Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ para el producto interno canónico.

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = < (1, 2, 1) >$ para el producto interno definido por $\langle x, y\rangle = x_1.y_1 + 2.x_2.y_2 + x_3.y_3 - x_1.y_2 - x_2.y_1$.

(c) $V = \mathbb{C}^3$, $S = < (i, 1, 1), (-1, 0, i) >$ para el producto interno canónico.

(d) $V = \mathbb{C}^4$, $S = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \,/\, \begin{cases} x_1 + 2i.x_2 - x_3 + (1+i).x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i).x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$ para el producto interno definido por $\langle x, y\rangle = x_1.\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2 + x_3.\overline{y}_3 + 3.x_4.\overline{y}_4$.

ii) Para cada uno de los subespacios del ítem anterior, hallar bases ortonormales para el producto interno considerado y definir explícitamente la proyección ortogonal sobre S.

iii) Con los datos del ítem i) (d), hallar el punto de S más cercano a $(0,1,1,0)$ y calcular la distancia de $(0,1,1,0)$ a S.

Ejercicio 7.

i) Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\ dx$.

(a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1,\ X,\ X^2,\ X^3\}$.

(b) Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = < 1 >$.

ii) Se considera $C[-1,1]$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\ dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \text{sen}(\pi x)$.

Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio $S = < 1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \text{sen}(\pi x) >$.

iii) Se considera $C[0,\pi]$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_{0}^{\pi} f(t).g(t)\ dt$.

(a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt al conjunto $B = \{1, \cos x, \text{sen}\ x\}$.

(b) Sea S el subespacio de $C[0,\pi]$ generado por B. Hallar el elemento de S más próximo a la función $f(x) = x$.

Ejercicio 8. Calcular f^* para cada una de las transformaciones lineales siguientes:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2) = (3.x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

ii) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 + (1-i)x_2, x_2 + (3+2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ para $B = \{(1,2,-1),(1,0,0),(0,1,1)\}$

iv) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $f(p) = p'$, con respecto al producto interno $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x).q(x)\ dx$.

v) $f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $f(A) = P^{-1}.A.P$, donde $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es inversible y $\langle A,B\rangle = tr(A.B^*)$.

Ejercicio 9. Sea $(V,\langle,\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una tranformación lineal. Probar que $\text{Im}(f^*) = (\text{Nu}(f))^\perp$.

Ejercicio 10. Sea $(V,\langle,\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea S un subespacio de V. Probar que la proyección ortogonal $P : V \to V$ sobre S es autoadjunta. Calcular sus autovalores.

Ejercicio 11.

i) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que $O.A.O^t$ sea diagonal:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

ii) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria tal que $U.A.U^*$ sea diagonal:

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 12. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

iv) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $< (1, 0, 1) >$.

Ejercicio 13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|f| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

Ejercicio 14. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|f| = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Probar que f es una rotación. Hallar $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

Aplicación del producto interno y del determinante al cálculo de volúmenes

Consideremos $\mathbb{R}^n$ con el producto interno canónico $\langle , \rangle$.
El área del paralelogramo $P(v_1, v_2)$ que definen dos vectores v_1 y v_2 linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ se puede calcular con la fórmula "base por altura", o sea

$$\|v_1\|.\, \|p_{<v_1>^\perp}(v_2)\|.$$

El volumen del paralelepípedo $P(v_1, v_2, v_3)$ que definen tres vectores v_1, v_2, v_3 linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ sería "área de la base por altura", o sea

$$\|v_1\|.\, \|p_{<v_1>^\perp}(v_2)\|.\, \|p_{<v_1,v_2>^\perp}(v_3)\|.$$

Si esto se generaliza a k vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$, el volumen del paralelepípedo $P(v_1, \dots, v_k)$ sería

$$\|v_1\|.\, \|p_{<v_1>^\perp}(v_2)\|.\, \|p_{<v_1,v_2>^\perp}(v_3)\| \dots \|p_{<v_1,\dots,v_{k-1}>^\perp}(v_k)\|.$$

Se define entonces recursivamente el volumen del paralelepípedo $P(v_1, \dots, v_k)$ definido por los vectores linealmente independientes $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ como:

$$\begin{cases} \text{vol}(P(v_1)) = \|v_1\| \\ \text{vol}(P(v_1, \dots, v_k)) = \text{vol}(P(v_1, \dots, v_{k-1})).\, \|p_{<v_1,\dots,v_{k-1}>^\perp}(v_k)\| \quad \text{para } k \geq 2. \end{cases}$$

Demostrando los ítems i), ii) y iii) siguientes, se prueba que el volumen del paralelepípedo definido por los vectores linealmente independientes $v_1, \dots, v_n$ en $\mathbb{R}^n$ es igual a $|\det(A)|$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \dots, v_n$.

Dados $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ se define la matriz $G(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ como

$$G(v_1, \dots, v_k)_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle.$$

i) Probar que:

   a) $v_k \in < v_1, \dots, v_{k-1} > \Rightarrow \det(G(v_1, \dots, v_k)) = 0$.
   b) $v_k \in < v_1, \dots, v_{k-1} >^\perp \Rightarrow \det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})).\, \|v_k\|^2$.
   c) $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})).\, \|p_{<v_1,\dots,v_{k-1}>^\perp}(v_k)\|^2$.

ii) Probar que, si $v_1, \dots, v_k$ son vectores linealmente independientes,

$$(\text{vol}(P(v_1, \dots, v_k)))^2 = \det(G(v_1, \dots, v_k)).$$

iii) Sean $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \dots, v_n$.

   a) Probar que $G(v_1, \dots, v_n) = A^t.\, A$.
   b) Deducir que $\text{vol}(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(A)|$.

iv) a) Calcular el área del paralelogramo definido por los vectores $(2, 1)$ y $(-4, 5)$ en $\mathbb{R}^2$.
   b) Calcular el volumen del paralelepípedo definido por $(1, 1, 3)$, $(1, 2, -1)$ y $(1, 4, 1)$ en $\mathbb{R}^3$.

v) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo. Probar que, si $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ son linealmente independientes,

$$\text{vol}(P(f(v_1), \dots, f(v_n))) = |\det f|.\, \text{vol}(P(v_1, \dots, v_n)).$$