

**MATEMATICA 2 - Verano de 2011**  
**Práctica 6 - Forma de Jordan**

**Ejercicio 1.** Hallar la forma y una base de Jordan para cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{array}{l}
 \text{i)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{ii)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

**Ejercicio 2.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$  una matriz nilpotente tal que  $A^5 \neq 0$  y sea  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  una base de Jordan para  $A$ . Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices  $A^2, A^3, A^4$  y  $A^5$ .

**Ejercicio 3.** Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$  tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases} .$$

**Ejercicio 4.**

- i) Decidir si existe una matriz  $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$  tal que  $\text{rg}(A) = 6, \text{rg}(A^2) = 4, \text{rg}(A^3) = 3, \text{rg}(A^4) = 1$  y  $\text{rg}(A^5) = 0$  simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.
- ii) Decidir si existe una matriz  $A \in \mathbb{C}^{16 \times 16}$  tal que  $\text{rg}(A) = 9, \text{rg}(A^2) = 5, \text{rg}(A^3) = 3, \text{rg}(A^4) = 1$  y  $\text{rg}(A^5) = 0$  simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

**Ejercicio 5.** Hallar la forma y una base de Jordan para cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{array}{l}
 \text{i)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{iv)} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{ii)} \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{v)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{iii)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 12 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

**Ejercicio 6.** Sea  $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$  el subespacio  $V = \langle e^x, x e^x, x^2 e^x, e^{2x} \rangle$ . Sea  $t : V \rightarrow V$  la transformación lineal definida por  $t(f) = f'$ . Hallar la forma y una base de Jordan para  $t$ .

**Ejercicio 7.** Para cada  $a \in \mathbb{R}$ , hallar la forma de Jordan de  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

**Ejercicio 8.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$  una matriz con autovalores  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  y que cumple:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^2 &= 11, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^3 &= 10, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^4 &= 10 \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^2 &= 11, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^3 &= 10, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^4 &= 9, \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I)^2 &= 12, & \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I)^3 &= 11. \end{aligned}$$

Hallar su forma de Jordan.

**Ejercicio 9.** Encontrar subespacios de dimensión 1, 2 y 3 que sean  $A$ -invariantes para

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 10.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$  la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular  $A^n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

**Ejercicio 11.** Sean  $A, B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Decidir si  $A$  y  $B$  son semejantes.

**Ejercicio 12.** Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Se define la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha, & a_1 = \beta \\ a_{n+2} = 4.a_{n+1} - 4.a_n & \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término  $a_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_0$ .

**Ejercicio 13.** Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 2$ .

**Ejercicio 14.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

- i) Calcular  $e^{At}$  para  $t \in \mathbb{R}$ .
- ii) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) + y(t) \\ z'(t) = -x(t) - y(t) + 3z(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = -1$ ,  $z(0) = 2$ .