MATEMATICA 2 - Verano de 2011

Práctica 4 - Determinantes

Ejercicio 1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

i) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.

i) Sea $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in K^{n\times n}$ una matriz triangular superior. Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

ii) Calcular el determinante de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3.

i) Si $A \in K^{n\times n}$, $B \in K^{m\times m}$ y $C \in K^{n\times m}$, sea $M \in K^{(n+m)\times(n+m)}$ la matriz de bloques definida por $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Probar que $\det(M) = \det(A).\det(B)$.

ii) Hallar una matriz $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ de la forma $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ con A, B, C y D en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\det(M) \neq \det(A).\det(D) - \det(B).\det(C)$.

Ejercicio 4. Calcular el determinante de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.

i) Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ y, para $i = 1, \dots, n$, sea $v_i = (1, \alpha_i, \alpha_i^2, \dots, \alpha_i^{n-1}) \in K^n$. Determinar bajo qué condiciones el conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

ii) Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ todos distintos y no nulos. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes.
(Sugerencia: Derivar $n-1$ veces la función $\sum_{i=1}^{n} c_i\, e^{\alpha_i x}$.)

Ejercicio 6. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A.\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$. Si $\det(A) = 3$, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 2 & 7 \\ a_{11}+2a_{13} & a_{21}+2a_{23} & a_{31}+2a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^{2\times 2}$, probar que no existe ninguna matriz $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible tal que $A.C = C.B$. ¿Y si no se pide que C sea inversible?

Ejercicio 8.

i) Sean $v_1 = (a,b,c)$ y $v_2 = (d,e,f)$ en $\mathbb{R}^3$ y sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la función definida por

$$\varphi(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z\end{pmatrix}.$$

(a) Probar que φ es una transformación lineal.

(b) Probar que si $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente, $\varphi(x,y,z) = 0$ es una ecuación implícita para el subespacio $< v_1, v_2 >$.

ii) Generalizar a $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 9. Sean v_1, v_2, v_3, w_1, w_2 y w_3 vectores en $\mathbb{R}^3$ (escritos como columnas). Se sabe que las matrices $(v_1 \mid v_2 \mid v_3)$ y $(w_1 \mid w_2 \mid w_3)$ son inversibles y que

$$\det(v_1 + w_1 \mid v_2 \mid v_3) = \det(v_1 + w_2 \mid v_2 \mid v_3) = \det(v_1 + w_3 \mid v_2 \mid v_3).$$

Probar que $< v_2, v_3 > = < w_1 - w_2, w_2 - w_3 >$.

Ejercicio 10.

i) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}.$$

Probar que el sistema $A.x = 0$ tiene solución única si y sólo si a, b, c y d no son todos iguales a cero.

ii) Analizar la validez de la afirmación anterior si $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

Ejercicio 11. Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de las siguientes matrices:

i) $\begin{pmatrix}2 & 3\\5 & 1\end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix}2 & -3 & 3\\-5 & 4 & 0\\0 & -2 & 2\end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta\\0 & 1 & 0\\\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$

Ejercicio 12. Resolver los siguientes sistemas lineales sobre $\mathbb{R}$ empleando la regla de Cramer:

i) $\begin{cases} 3.x_1 - 2.x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2.x_3 &= 1 \\ 2.x_1 + x_2 + 4.x_3 &= 2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2.x_2 - 4.x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 4 \\ 5.x_1 + x_2 - 3.x_3 + 2.x_4 &= 0 \end{cases}$

Ejercicio 13. Dadas las funciones reales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ que satisfacen

$$\begin{cases} x_1(t) + t.\,x_2(t) + t^2.\,x_3(t) &= t^4 \\ t^2.\,x_1(t) + x_2(t) + t.\,x_3(t) &= t^3 \\ t.\,x_1(t) + t^2.\,x_2(t) + x_3(t) &= 0 \end{cases},$$

calcular $\lim\limits_{t\to+\infty} x_2(t)$.

Ejercicio 14. Sea $A \in K^{3\times 3}$ no inversible tal que $A_{11}.A_{33} - A_{13}.A_{31} \neq 0$. Calcular la dimensión de $S = \{x \in K^3 / \, A.x = 0\}$.

Ejercicio 15.

i) Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz inversible. Calcular $\det(\mathrm{adj}(A))$.

ii) Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz tal que $\mathrm{rg}(A) < n-1$. Probar que $\mathrm{adj}(A) = 0$.

iii) Sea $A \in K^{n\times n}$ tal que $\mathrm{rg}(A) = n-1$. Probar que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{adj}(A)) = 1$.