Ejercicios de Verdadero o Falso

Determine la validez o falsedad de las siguientes afirmaciones y justifique con explicaciones claras o con contraejemplos.

Verano 2008

1. Si
$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$
no es la matriz nula y $B \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ entonces el sistema
$$AB \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$$
es incompatible.

2. Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ es no nula entonces existe $B \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ tal que AB es inversible.

3. Si $B \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ es no nula entonces existe $A \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ tal que BA es inversible.

4. Dados $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ entonces existe un triángulo de vértices u, v, w.

5. Dado $u \in \mathbb{R}^2$ entonces existe un único $v \in \mathbb{R}^2$ de norma 1 tal que u y v son perpendiculares.

6. Sean u y $v \in \mathbb{R}^2$ perpendiculares, con $\|u\| = \|v\| = 1$. Entonces $u + v$ es perpendicular a $u - v$.

7. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que $Ax = b$ tiene solución única. Si $Ay = Az$ entonces $y = z$.

8. Si $AB = 0$ con $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

9. Dados 3 puntos distintos en $\mathbb{R}^{3\times 3}$, siempre existe un **único** plano que los contiene.

10. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz de Markov. Entonces A es inversible.

11. Sea $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz de Markov. Entonces B^2 es de Markov.

12. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz de Markov. Entonces el vector $v = (1, 1, 1)$ es autovector de A^t asociado al autovalor 1.

13. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz de Markov. Entonces A es inversible.

14. Sea $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz de Markov. Entonces B^2 es de Markov.

15. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz de Markov. Entonces el vector $v = (1,1,1)$ es autovector de A^t asociado al autovalor 1.

16. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz de Markov. Entonces A es inversible.

17. Sea $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz de Markov. Entonces B^2 es de Markov.

18. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz de Markov. Entonces el vector $v = (1,1,1)$ es autovector de A^t asociado al autovalor 1.

1°Cuatrimestre 2008

1. Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, entonces $N(A) = N(A^t)$.

2. Si $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$, entonces $\dim(N(A)) = \dim(N(A^t))$.

3. Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible entonces $2A + A^2$ es inversible.

4. Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ inversible entonces $\mathsf{Rg}(A^3 - 3A) = \mathsf{Rg}(A^2 - 3I)$.

5. Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ inversible, $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y el sistema $A^{-1}Bx = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ tiene una única solución entonces B es inversible.

6. Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ y $B \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ entonces el sistema $ABx = b$ resulta compatible para todo $b \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.

7. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, $A \neq 0$, tal que $u = (1,2,-1)$ y $v = (0,3,0)$ son soluciones del sistema $Ax = 0$. Entonces $\mathrm{rg}(A) = 1$.

8. Si el sistema
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
es compatible, entonces el sistema
$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
es compatible.

9. Si $A, B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ son matrices tales que $\det A \neq 0$ y 4 no es autovalor de B, entonces $4A^2 - A^2B$ es inversible.

10. Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\lambda = 2$ es el único autovalor, entonces $A = 2I$.

11. Si $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 1 & -a+c & -b+d \\ 3 & 2a & 2b \end{pmatrix}$, entonces $\det A = 10$.

12. Sean A, B y $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det A = 3$, $B \neq 0$, C tiene autovalores $\{1, 2, 3\}$ y vale
$ACB^2 = CA^tB$, entonces B es inversible.

13. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que el sistema $Ax = 5x$ tiene solución no nula, $\mathrm{rg}(A+I) \leq 2$ y $\mathrm{tr}(A) = 3$, entonces A no es inversible.

14. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz de Markov tal que $\lambda = -1$ es autovalor, entonces $A^2 = Id$.

1°Cuatrimestre 2009

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ tal que $\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\} = \langle (1,3,4), (0,0,4) \rangle$. Entonces $\mathrm{rg}(A) = 1$.

2. Dado el vector $u = (2,1)$, existe un único vector v tal que v es perpendicular a u, y $\|v\| = 5$.

3. Todo sistema lineal con más ecuaciones que incógnitas es compatible.

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que el sistema $Ax = 0$ admite solución no trivial. Entonces el $Rg(A) = 3$.

5. Sean el plano $\pi : \lambda(0,1,1) + \mu(1,2,0) + (1,0,0)$ y el punto $P = (1,6,2)$. Entonces $d(\pi, P) = 0$.

6. Sean en $\mathbb{R}^3$ las rectas $L_1 : \lambda(1,1,1)$ y $L_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 0 \\ x - z & = & 1 \end{array} \right.$. Entonces $d(L_1, L_2) = \sqrt{2}$.

7. Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es matriz de Markov y $\lambda = -1$ es autovalor, entonces A^2 es de Markov y 1 es el único autovalor.

8. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible. Entonces el sistema $ABx = 0$ es compatible determinado.

9. Si $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 5$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & -c & -d \\ -1 & c & d \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$. Entonces $\det(A) = -5$

10. Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ de Markov, entonces A es inversible.

11. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $Ax = 2x$ tiene solución no nula, $Rg(A + I) \leq 2$ y $TrA = 1$. Entonces A no es inversible.

12. Si $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2$ entonces $\det\begin{pmatrix} 7b & -a & 0 \\ 7d & -c & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 42$.

Otros

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que los sistemas $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son compatibles.

   Entonces el sistema $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es compatible.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 1 \end{pmatrix} = 2$ y $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & d \end{pmatrix} = 2$. Entonces el sistema

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   tiene solución única.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Si $\mathrm{Tr}A = -1$ y $\det A = 1$, entonces $A^3 = 1$.

4. Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es de Markov, y $\dim \mathrm{Nu}(A-I) > 1$, entonces no existe $\lim_{n\to\infty} A^n$.

5. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y sea $I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matriz identidad. Entonces

$$\det\begin{pmatrix} A & I \\ I & I \end{pmatrix} = \det(A) - 1$$

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, $A \neq 0$, tal que $u = (1, 2, -1)$ y $v = (0, 3, 0)$ son soluciones del sistema $Ax = 0$. Entonces $\operatorname{rg}(A) = 1$.