

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Verano 2011

Práctica 6 - Rango de matrices

1. Dadas las matrices

$$A = (1 \ 1 \ 0 \ 1), \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 5 & -5 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}.$$

- hallar una base y la dimensión del espacio fila, del espacio columna y del núcleo.
- calcular el rango.
- repetir los ítems (a) y (b) para las respectivas matrices transpuestas.

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- Si $m = 7$, $n = 8$ y $\text{rg}(A) = 2$, calcular $\dim(N(A))$.
- Si $m = 6$, $n = 5$ y $\dim(N(A)) = 3$, calcular $\text{rg}(A)$.
- Si $m = 3$, $n = 5$ y $\dim(E_C(A^t)) = 3$, calcular $\text{rg}(A)$ y $\dim(N(A))$.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

- Hallar una base y la dimensión de $E_C(A)$.
- Calcular $\dim(N(A))$, $\dim(N(A^t))$, $\dim(E_F(A))$, $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A^t)$.

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ una matriz tal que $\dim(N(A)) = 1$ y sea $b \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$. Determinar el rango de la matriz ampliada $[A|b] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ para que el sistema $A \cdot x = b$ tenga solución.

5. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & b \end{pmatrix}$.

- Determinar el valor de $b \in \mathbb{R}$ que hace que $\text{rg}(A) = 2$.
- Para el valor de b hallado, decidir si $v = (3, 2, 2) \in E_C(A)$ y hallar una base de $N(A^t)$.

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & k+2 & 1 \\ -1 & k^2-7 & -1 & -2 \\ 1 & k^2-11 & 2k+7 & k-9 \end{pmatrix}.$$

- Hallar **todos** los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\dim(N(A)) = \dim(E_F(A^t))$.
- Para cada k hallado, calcular una base de $N(A)$ y una base de $N(A^t)$.

7. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ y sean $B \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ y $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ dos matrices tales que $(A \cdot B) \cdot C = C \cdot (A \cdot B) = I$.

Calcular $\text{rg}(A \cdot B \cdot A)$ y $\dim(N(A \cdot B \cdot A))$, y hallar una base de $N(A \cdot B \cdot A)$.

8. Sean $P \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ y $Q \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$ tales que $\text{rg}(P) + \dim(N(Q)) = 6$ y $\dim(E_F(P^t)) = 5$.

(a) Calcular $\dim(N(P))$, $\text{rg}(P)$, $\dim(N(Q))$ y $\text{rg}(Q)$.

(b) Calcular $\text{rg}(Q^t \cdot P^{-1})$.

(c) Calcular $\dim[N((W \cdot P^{199})^t)]$, si $W \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ es una matriz tal que $\dim(N(W)) = 3$.

9. Sean $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y S el sistema $S : \begin{cases} ax + y + bz = 0 \\ 2ax - y + bz = 0 \end{cases}$.

Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ tales que el subespacio $N(A)$ coincida con el espacio de soluciones de S .

10. Para cada uno de los siguientes subespacios S , hallar $m, n \in \mathbb{N}$, y $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tales que $N(A) = S$.

(a) $S = \langle (1, 3, 1), (-2, 1, 0) \rangle$.

(b) $S = \langle (1, 3, 1, -2), (-2, 1, 0, 3), (-1, 4, 1, 1) \rangle$.

11. Dados los subespacios de \mathbb{R}^4 , $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 + x_3 = -x_1 + 2x_2 + (\alpha + 2)x_3 + x_4 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : -x_1 + (\alpha^2 - 7)x_2 - x_3 + 2x_4 = x_1 + (\alpha^2 - 11)x_2 + (2\alpha + 7)x_3 + 2x_4 = 0\}$:

(a) Calcular $\dim(S \cap T)$ es términos del valor $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Para cada α tal que $\dim(S \cap T) = 1$, hallar una base de $S \cap T$.

(c) Para cada α tal que $\dim(S \cap T) = 2$, hallar una base de $S + T$.