# ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Verano 2011

## Práctica 5 - Subespacios

1. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios del espacio vectorial dado:

   (a) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 2x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

   (b) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 = 3\} \subset \mathbb{R}^2$.

   (c) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

   (d) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 < -1\} \subset \mathbb{R}^2$.

   (e) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

   (f) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 4x_2 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

2. Dibujar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y analizar si son subespacios o no:

   (a) $\{t(1, 2) :\ t \in \mathbb{R}\}$.

   (b) $\{t(1, 2) + (2, 2) :\ t \in \mathbb{R}\}$.

   (c) $\{t(1, 2) :\ t \in \mathbb{R}$ con $t \geq 0\}$.

   (d) $\{s(1, 2) + t(2, 2) :\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

   (e) $\{s(1, 2) + t(2, 4) :\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

   (f) $\{s(1, 2) + t(2, 2) :\ s, t \in \mathbb{R}$ con $s + t = 1\}$.

3. Dados $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, describir geométricamente los subespacios $S = \{t\,u; t \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{s\,v + t\,w; s, t \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^n$.

4. Se consideran los vectores $v_1 = (2, 3)$ y $v_2 = (1, -1)$ de $\mathbb{R}^2$. Determinar si $u = (1, 2)$ es combinación lineal de $v_1$ y $v_2$. ¿Qué sucede con $w = (0, 0)$?

5. Analizar si $v \in S$ o no en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $S = \langle (1, 2, 3) \rangle \subset \mathbb{R}^3; \quad v = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5})$.

   (b) $S = \langle (1, 2, 3),\ (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}) \rangle \subset \mathbb{R}^3; \quad v = (-5, -10, -15)$.

   (c) $S = \langle (1, -1, 2, 1),\ (2, 1, 3, 0) \rangle \subset \mathbb{R}^4; \quad v = (0, -3, 1, 1)$.

6. En cada caso, hallar dos subespacios distintos de $\mathbb{R}^3$ con las condiciones:

   (a) que contenga al vector $v = (1, 2, 3)$.

   (b) que contenga al vector $v = (1, 1, 0)$ y no contenga al vector $w = (0, 1, 1)$.

7. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores generan el espacio $\mathbb{R}^n$ correspondiente o no:

   (a) $\{(1, 1), (1, -1)\} \subset \mathbb{R}^2$.

   (b) $\{(1, 1), (1, -1), (3, 4)\} \subset \mathbb{R}^2$.

   (c) $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

   (d) $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1), (3, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

   (e) $\{(1, 1, 1, -1), (0, -1, 1, -2), (1, 1, 0, 1), (3, 2, 1, 2)\} \subset \mathbb{R}^4$.

8. Analizar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores.

   (a) $\{(1,-3,5),\ (-2,2,1),\ (-1,-1,6)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
   (b) $\{(1,2,2,-1),\ (0,2,-2,-3),\ (1,1,0,2),\ (0,1,-1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
   (c) $\{v\}$ con $v \in \mathbb{R}^n$.
   (d) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, 0\}$ con $v_1, v_2, \ldots v_n, 0 \in \mathbb{R}^n$.

9. Hallar (si es posible) tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente dependientes de manera tal que dos cualesquiera de ellos sean linealmente independientes.

10. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales los siguientes conjuntos de vectores resultan linealmente independientes en el espacio $\mathbb{R}^n$ correspondiente:

    (a) $\{(1,-1,2),\ (k+1,k,k+6),\ (k,k+1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
    (b) $\{(k-2,k,1,0),\ (0,k,0,0),\ (1,1,0,k-1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

11. Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son una base del espacio $\mathbb{R}^n$ correspondiente. En el caso que no sean base, analizar la posibilidad de extraer una base o bien de extender el conjunto a una base de $\mathbb{R}^n$.

    (a) $\{(1,0,1),\ (1,0,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
    (b) $\{(1,1,2),\ (0,1,1),\ (0,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
    (c) $\{(1,1,2),\ (0,1,1),\ (2,3,3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
    (d) $\{(1,0,1),\ (1,0,-1),\ (0,0,1),\ (1,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
    (e) $\{(1,1,1,1,1),\ (1,2,0,1,1),\ (1,1,1,2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^5$.

12. Hallar bases y determinar la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios:

    (a) $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - x_2 = 0\}$.
    (b) $S = \{x \in \mathbb{R}^5 :\ x_1 - 2x_3 + x_5 = 0,\ \ 2x_1 + x_4 - 2x_5 = 0,\ \ 3x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0\}$.
    (c) $S = \langle (1,1,-1),\ (0,1,1),\ (1,2,0) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.

13. Sea $S = \langle (0,-1,k),\ (1,-1,0),\ (-1,0,2) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$. Estudiar la dimensión y dar una base del subespacio $S$ en función de $k$.

14. Dados los subespacios $S = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\}$ y $T = \langle (2,3,-1),\ (-2,1,5),\ (4,2,-6) \rangle$ de $\mathbb{R}^3$:

    (a) Probar que $T \subset S$.
    (b) Calcular $\dim(S)$, $\dim(T)$ y decidir si vale la igualdad $T = S$ o no.

15. En cada uno de los siguientes casos, hallar bases de $S$, $T$, $S \cap T$ y $S + T$. ¿Qué relación existe entre las dimensiones de estos cuatro subespacios?

    (a) $S = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 - x_2 = 0\}$,
    $T = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 = 0,\ x_2 - x_4 = 0,\ x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$.
    (b) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$, $\quad T = \langle (1,1,1),\ (0,-2,0) \rangle$.
    (c) $S = \langle (-1,2,-1,2),\ (1,-1,0,1),\ (0,1,-1,2) \rangle$,
    $T = \langle (1,0,1,1),\ (0,1,1,-1),\ (1,1,2,0) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

16. Para los subespacios $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ y $T = \langle (2,-1,-1,3),\ (1,1,0,-2),\ (4,1,-1,-1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$:

    (a) Hallar una base $\mathcal{B}_1$ del subespacio $S \cap T$.

    (b) Extender la base $\mathcal{B}_1$ a una base de $S$. Hacer lo mismo para una base de $T$.

    (c) Hallar una base $\mathcal{B}_2$ del subespacio $S + T$ que contenga una base de $S$ y una base de $T$. Extender $\mathcal{B}_2$ a una base de $\mathbb{R}^4$.

17. Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 - x_4 = 0, -2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ y $T = \langle (0,1,2,0), (1,2,0,\lambda) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

    (a) Hallar todos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $S \cap T \neq \{0\}$.

    (b) Para cada valor $\lambda$ hallado en (a), encontrar una base de $S \cap T$.

18. Sean $S$ y $T$ subespacios de $\mathbb{R}^6$ tales que $\dim(S) = 3$ y $\dim(T) = 4$.

    (a) Decidir si las siguientes situaciones son posibles o no:
    (*i*) $S \subset T$. (*ii*) $\dim(S+T) = 7$. (*iii*) $\dim(S \cap T) = 4$. (*iv*) $S \cap T = \{0\}$.

    (b) Si $\dim(S \cap T) = 3$, ¿qué puede decirse de $S$ y $T$?

    (c) Si $\dim(S + T) = 4$, ¿qué puede decirse de $S$ y $T$?