# ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Verano 2011

## Práctica 4 - Geometría lineal

1. En cada uno de los siguientes casos, decidir gráfica y analíticamente cuáles de los puntos pertenecen a la recta $L$:

   (a) $L : (x, y) = t(-2, 3) + (2, 2)$
   $P_1 = (2, 2),\ P_2 = (-2, 3),\ P_3 = (0, 0),\ P_4 = (12, -13),\ P_5 = (2, -1).$

   (b) $L : (x, y) = t(-1, 1) + (3, -3)$
   $P_1 = (3, -3),\ P_2 = (0, 0),\ P_3 = (-1, 1),\ P_4 = (3, 4),\ \ P_5 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$

2. Graficar y dar una ecuación vectorial para la recta que:

   (a) pasa por $P = (-1, 2)$ con vector director $v = (3, 1)$.
   (b) pasa por $P = (1, -4)$ y $Q = (-1, -3)$.
   (c) es paralela a la recta $L : (x, y) = t(-2, 3) + (1, -1)$ y pasa por $P = (1, -4)$.
   (d) es perpendicular a la recta $L : (x, y) = t(2, 3) + (5, 7)$ y pasa por el origen.

3. (a) Dar una ecuación vectorial para cada una de las siguientes rectas en $\mathbb{R}^2$:

   i. $y = -2x + 1$.
   ii. $2x - 3y = 5$.
   iii. $y = -2$.
   iv. $x = 3$.

   (b) Dar una ecuación implícita para cada una de las siguientes rectas en $\mathbb{R}^2$:

   i. $L : (x, y) = t(3, 2) + (1, 1)$.
   ii. $L : (x, y) = t(2, 0) + (-1, 3)$.
   iii. $L : (x, y) = t(0, -1) + (2, 1)$.

4. En cada uno de los siguientes casos, dar una ecuación vectorial para la recta que:

   (a) está dirigida por $v = (0, 1, 0)$ y pasa por $P = (0, 2, 4)$.
   (b) pasa por los puntos $P = (-2, 3, 4)$ y $Q = (-1, 3, 1)$.
   (c) es paralela al eje $z$ y pasa por $P = (1, 2, 3)$.
   (d) es perpendicular al plano $\pi : (x, y, z) = t(1, 1, 0) + s(0, -1, 2) + (1, 0, -2)$ y pasa por $P = (1, 1, 1)$.
   (e) es perpendicular a la recta $L : (x, y) = t(1, -2, 1) + (3, 5, 7)$ y pasa por $P = (1, 9, -3)$. ¿Es única?

5. Dar la ecuación vectorial del plano dirigido por $v$ y $w$ que pasa por el punto $P$ en los siguientes casos:

   (a) $v = (0, 1, 0)$, $w = (1, 0, 0)$, $P = (0, 0, 1)$.
   (b) $v = (0, 2, 0)$, $w = (1, 1, 0)$, $P = (-1, 2, 1)$.

   Graficar los planos y compararlos.

6. (a) Dar una ecuación implícita para el plano

$$\pi : (x, y, z) = t(1, 1, 0) + s(0, -1, 2) + (-2, 0, 4).$$

(b) Dar una ecuación vectorial para el plano $\pi : -x + 3y + 2z = 1$.

7. Dar una ecuación vectorial y una ecuación implícita para el plano que:

   (a) pasa por los puntos $(2, 1, 2)$, $(1, 1, 1)$ y $(3, 2, 7)$.

   (b) pasa por el punto $(1, 2, 1)$ y es paralelo al plano que contiene a los ejes $x$ e $y$.

   (c) es paralelo a la recta $L : (x, y, z) = t(1, 2, -4) + (1, 2, 1)$ y contiene a los puntos $P = (2, 2, 1)$ y $Q = (1, 2, -3)$.

   (d) contiene al punto $(-1, 2, 2)$ y es ortogonal a la recta $L : (x, y, z) = t(1, 1, -1) + (-1, 2, 2)$.

8. (a) Decidir si los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (-2, 0, 1)$ y $C = (3, 0, 2)$ son colineales (están en una misma recta) o no.

   (b) Decidir si los puntos $A = (8, 2, 4)$, $B = (4, 2, 8)$, $C = (-2, 0, 1)$ y $D = (1, -1, 3)$ son coplanares (están en un mismo plano) o no.

9. Dado el plano $\pi :\ 2x - 5y + 3z = 11$:

   (a) Hallar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $(2a, a, 7) \in \pi$.

   (b) Decidir si existe algún valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que $(1, 3a, 5a) \in \pi$.

10. Sean $L : (x, y, z) = t(1, -1, -1) + (1, 0, -2)$, $L' : (x, y, z) = t(3, 5, 1) + (0, 1, 2)$ y $\pi : 2x - y + 3z = 5$. Calcular $L \cap \pi$ y $L' \cap \pi$.

11. Determinar si las rectas $L$ y $L'$ son concurrentes, paralelas/coincidentes o alabeadas:

    (a) $L : (x, y, z) = t(1, 0, -1) + (-1, 1, 2)$, $\quad L' : (x, y, z) = t(-1, 1, 2) + (1, 0, -1)$.

    (b) $L : (x, y, z) = t(1, 1, -1) + (-1, 2, 2)$, $\quad L' : (x, y, z) = t(2, 2, -2) + (1, 0, -1)$.

    (c) $L : (x, y, z) = t(1, \frac{1}{2}, -1) + (-1, 1, 2)$, $\quad L' : (x, y, z) = t(-2, -1, 2) + (3, 3, -2)$.

    (d) $L : (x, y, z) = t(1, 2, -1) + (-1, -1, 2)$, $\quad L' : (x, y, z) = t(-1, 1, 1) + (3, 2, -1)$.

    En cada caso determinar si existe un plano que contenga a $L$ y $L'$. Si la respuesta es afirmativa, hallarlo, y determinar si es único.

12. Determinar en qué casos los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ se intersecan y hallar la intersección.

    (a) $\pi_1 :\ 4x + 2y - 3z = 1$; $\quad \pi_2 :\ 2x + y - \frac{3}{2}z = 1$.

    (b) $\pi_1 :\ 3x - 2y - 1 = 0$; $\quad \pi_2$ el plano dirigido por $(0, 0, 1)$, $(2, 3, 3)$ que pasa por $(1, 1, 2)$.

    (c) $\pi_1$ el plano que pasa por $(-1, 1, 2)$ con vector normal $(1, 2, -1)$;
    $\pi_2$ el plano que pasa por $(1, 1, 1)$, $(2, 3, 1)$ y $(-1, -2, 2)$.

13. Hallar ecuaciones implícitas para cada una de las rectas siguientes (es decir, describirlas como intersección de dos planos dados por ecuaciones implícitas):

    (a) $L$ que es intersección del plano $xy$ con el plano $yz$.

    (b) $L : (x, y, z) = t(1, 0, -1) + (-1, 1, 2)$.

    (c) $L$ que pasa por los puntos $(-5, 3, 7)$ y $(2, -3, 3)$.

14. En cada uno de los siguientes casos, hallar la intersección de las rectas $L$ y $L'$:

    (a) $L : (x, y, z) = t(1, 1, 0) + (0, -1, 2)$, $\quad L' : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ -2x + y + z = -2 \end{cases}$.

    (b) $L : (x, y, z) = t(1, 1, 0) + (0, -1, 2)$, $\quad L' : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ -2x + 2y + z = 2 \end{cases}$.

15. Sea $L_1$ la recta que tiene dirección $(1, 2, -1)$ y pasa por $(-1, 3, 1)$, y sea $L_2$ la recta que pasa por $(-1, 1, 3)$ y por $(1, 2, 7)$.

    (a) Verificar que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

    (b) Determinar una recta $L_3$ paralela a $L_1$ que interseque a $L_2$ en el punto $(-1, 1, 3)$.

16. Sean $L_1$ y $L_2$ las rectas de $\mathbb{R}^2$, $L_1 : x - y = 1$, y $L_2 : x + y = 3$.

    (a) Calcular el ángulo entre $L_1$ y $L_2$.

    (b) Hallar una recta $L_3$ tal que $\angle(L_1, L_3) = \angle(L_2, L_3)$ y $L_1 \cap L_2 \in L_3$.

17. Sean $L_1 : (x, y, z) = t(1, -2, 1) + (0, 0, -2)$ y $L_2$ la recta que pasa por $(1, 4, 2)$ y $(0, 2, -1)$.

    (a) Verificar que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.

    (b) Hallar un plano que contenga a $L_1$ y $L_2$ y determinar el ángulo entre $L_1$ y $L_2$.

18. Encontrar **todos** los puntos de la recta $L : (x, y, z) = t(1, -1, 0) + (2, 1, -1)$ que están a distancia 6 del punto $P = (2, 1, -1)$.

19. Calcular la distancia entre:

    (a) la recta $L : (x, y) = t(1, 1) + (3, 0)$ y el punto $P = (-1, 1)$.

    (b) la recta $L : (x, y) = t(1, 1, 0) + (3, 0, 0)$ y el punto $P = (-1, 1, 0)$.

    (c) el plano $\pi$ que pasa por $(1, 2, 1)$ y tiene vector normal $(1, -1, 2)$ y el punto $P = (1, 2, 5)$.

20. Sean $L : (x, y, z) = t(2, -2, -3) + (0, 2, 2)$ y $P = (0, -2, -1)$.

    (a) Hallar el plano $\pi$ perpendicular a $L$ que pasa por $P$ y determinar $Q = L \cap \pi$.

    (b) Calcular $d(P, Q)$. ¿Qué significa en este problema el número $d(P, Q)$?

21. Sean $\pi$ el plano de ecuación $x + y + z = 1$ y $L$ la recta $L : (x, y, z) = t(-1, 0, 1) + (1, 1, 2)$.

    (a) Probar que $L$ es paralela a $\pi$.

    (b) Hallar una recta $L'$ ortogonal a $\pi$ que pase por $P = (1, 1, 2)$ y determinar $Q = L' \cap \pi$.

    (c) Calcular $d(P, Q)$. ¿Qué significa el número $d(P, Q)$ en este problema?

22. Se consideran las rectas $L_1 : \begin{cases} 2x - y - z &= 4 \\ 4x - y - 2z &= 9 \end{cases}$ y $L_2 : (x, y, z) = t(1, 0, 2) + (1, 2, -3)$.

    (a) Probar que $L_1$ y $L_2$ son paralelas.

    (b) Hallar un plano $\pi$ perpendicular a $L_2$ que pase por $P = (1, 2, -3)$ y determinar $Q = L_1 \cap \pi$.

    (c) Calcular $d(P, Q)$. ¿Qué significa el número $d(P, Q)$ en este problema?

23. Se consideran las rectas $L_1 : \begin{cases} x + z &= 5 \\ 2x + y + 4z &= 11 \end{cases}$ y $L_2 : (x, y, z) = t(1, 1, -1) + (0, 2, 1)$.

    (a) Verificar que $L_1$ y $L_2$ son alabeadas.

    (b) Hallar un plano $\pi$ que contenga a $L_1$ y sea paralelo a $L_2$.

    (c) Hallar $d(P, \pi)$, con $P = (0, 2, 1)$. ¿Qué significa $d(P, \pi)$ en este problema?