

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Verano 2011

Práctica 3 - Matrices y Determinantes

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:

(a) $A + 3B - 3C$ y $A + 3(B - C)$

(b) $A - (B - 2C)$ y $A - B + 2C$

¿Qué se observa?

2. Cuando sea posible, calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Vale la igualdad entre estos productos?

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $A = (1 \ 2 \ 3)$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

3. Se consideran matrices de los siguientes tamaños: $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$, $B \in \mathbb{R}^{5 \times 7}$, $C \in \mathbb{R}^{7 \times 5}$. Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles. En caso afirmativo, indicar el tamaño (número de filas y de columnas) de la matriz resultado.

(a) $A \cdot B$

(b) $B \cdot A$

(c) $B \cdot C$

(d) $C \cdot B$

(e) $A \cdot A$

(f) $A \cdot B \cdot C$

(g) $B \cdot C \cdot A$

(h) $B \cdot C \cdot B \cdot C$

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:

(a) A^2

(b) B^3

(c) $-2A^2 + B^3A$

5. Mostrar, dando un contraejemplo, que la propiedad " $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$ " no es válida para matrices.

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ analizar si son válidas (para matrices) las fórmulas clásicas de factorización:

(a) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$

(b) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

7. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular:

(a) A^t y B^t

(b) $(A \cdot B)^t$ y $B^t \cdot A^t$ ¿Qué se observa?

16. Para cada una de las siguientes matrices, hallar su determinante usando propiedades y resultados y realizando la menor cantidad de cálculos posibles.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (e) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (f) \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

17. Para cada una de las siguientes matrices, hallar su determinante usando resultados y tratando de realizar la menor cantidad de cálculos posibles.

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & -10 & 17 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & -15 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (e) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (f) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $\det(A) = 5$. Calcular los determinantes de las matrices:

$$(a) \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{pmatrix}$$

19. Hallar **todos** los $k \in \mathbb{R}$ para los que A es inversible en cada uno de las siguientes casos:

$$(a) \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & 2 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 4 & k \\ k & -2 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

20. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ tal que $\det(A) = 2$ y sea $B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ inversible. Calcular:

$$(a) \det(-2A) \quad (b) \det(A^3) \quad (c) \det(A^{-3}) \\ (d) \det(-2 \cdot A^3) \quad (e) \det((-2 \cdot A)^3) \quad (f) \det(B \cdot A \cdot B^{-1})$$

21. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tales que $\det(A) = 4$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular:

$$(a) \det(A + A \cdot B) \quad (b) \det(-2A^{-1} + A^{-1} \cdot 5B)$$

22. Sea $B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ una matriz inversible y sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ una matriz que satisface que $\det(A) = 8$ y $A \cdot B = \det(B) \cdot I$. Hallar $\det(B)$.

23. Sean $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$. Determinar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $B \cdot A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es inversible, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4-a & 3 & a^2-4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

y sea $b \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ cualquiera. ¿Puede el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ ser compatible determinado?

25. ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ es el sistema lineal

$$\begin{cases} -x + \alpha y + z & = \alpha \\ -x + (1 - \alpha)z & = 1 \\ -x + y + z & = \alpha^2 \end{cases}$$

compatible determinado?

Resolver el sistema para cada valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.

26. Encontrar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $Ax = x$ admite solución no trivial, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

27. Sean $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz con $\det(B) \neq 0$. Hallar **todos** los $x \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ tales que $(B \cdot A) \cdot x = 2B \cdot x$.