ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Verano 2011

Práctica 1 - Operaciones vectoriales

1. Dados los vectores $u = (1, 2)$, $v = (-1, 3)$ y $w = (-1, -2)$ calcular analítica y gráficamente:
   (a) $u + v$; $v + w$.
   (b) $(u + v) + w$; $u + (v + w)$.
   (c) $3u + 3v$; $3(u + v)$.
   (d) $u - v$.
2. Sea $w = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$. Graficar en el plano:
   (a) $\{t \cdot w : t \in \mathbb{R}\}$.
   (b) $\{t \cdot w : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$.
   (c) $\{t \cdot w : t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}$.
3. Dados los vectores $u = (0, 1, 2)$, $v = (1, 1, 0)$ y $w = (-1, 1, 1)$ calcular:
   (a) $u + v$.
   (b) $u + v + w$.
   (c) $u - v$.
   (d) $2u$.
   (e) $-3w$.
   (f) $-v + \frac{2}{3}w$.
4. En el bioterio observamos que el día primero de julio había 322 ratas de cepa α, 148 de cepa β y 290 de cepa γ. Durante el mes de julio se produjeron 104 nacimientos de cepa α, 48 de cepa β y 110 de cepa γ. A su vez murieron 220 animales, repartidos ordenadamente en 79 de la primer cepa, 51 de la segunda y 90 de la última cepa. Calcular el vector u de población inicial, el vector v de natalidad durante julio, el vector w de mortalidad durante el mismo mes y el vector z de población final al terminar el mes.
5. Calcular analítica y gráficamente el punto medio entre los puntos $P = (1, 4)$ y $Q = (3, 2)$.
6. Dados los vectores $v = (1, -2, 2)$, $w = (2, 0, 3)$ y $z = (4, 4, 4)$ realizar las operaciones:
   (a) $v \cdot w$; $w \cdot v$.
   (b) $(v + w) \cdot z$; $(v \cdot z) + (w \cdot z)$.
   (c) $(3v) \cdot w$; $3(v \cdot w)$.
   (d) $v \cdot v$; $w \cdot w$.
7. Calcular el módulo (o norma) de los vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ según corresponda:
   (a) $u = (1, 2)$, $v = (-1, -2)$, $w = (-3, 4)$, $z = (\frac{-3}{5}, \frac{4}{5})$.
   (b) $u = (0, 1, 2)$, $v = (-1, 1, 1)$, $w = (0, 1, 2) + (-1, 1, 1)$.
   (c) $u = (2, -1, 3)$, $v = -2 \cdot (2, -1, 3)$, $w = 2 \cdot (2, -1, 3)$.
8. Normalizar cada uno de los vectores del ejercicio anterior.
9. Determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos:
   (a) $A = (1, -3)$; $B = (0, 0)$.
   (b) $A = (1, -3)$; $B = (4, 1)$.
   (c) $C = (1, 2, 3)$; $D = (4, 1, -2)$.
   (d) $C = (4, -2, 6)$; $D = (3, -4, 4)$.

10. Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ que satisfacen:

    (a) $v = (4, k)$ y $\|v\| = 5$.
    (b) $v = (1, k, 0)$ y $\|v\| = 2$.
    (c) $v = k \cdot (2, 2, 1)$ y $\|v\| = 1$.
    (d) $A = (1, 1, 1),\ B = (k, -k, 2)$ y $d(A, B) = 2$.

11. Sea $C = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Graficar en el plano los siguientes conjuntos:

    (a) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 :\ \|A\| = 1\}$.
    (b) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 :\ \|A\| \leq 1\}$.
    (c) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 :\ \|A - C\| = 1\}$.
    (d) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 :\ \|A - C\| \leq 1\}$.

12. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales (perpendiculares) o no:

    (a) $v = (1, 1); \quad w = (-2, 2)$.
    (b) $v = (2, -3); \quad w = (0, 0)$.
    (c) $v = (1, 1, 1); \quad w = (1, 0, 1)$.
    (d) $v = (1, -2, 4); \quad w = (-2, 1, 1)$.

13. Hallar:

    (a) Tres vectores en el plano, distintos entre sí, que sean ortogonales al vector $v = (2, 3)$. ¿Qué relación encuentra entre los vectores hallados? Graficar.
    (b) Todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que son ortogonales a $v = (2, -2)$ y tienen norma 1.
    (c) Tres vectores de $\mathbb{R}^3$, distintos entre sí, que sean ortogonales al vector $v = (1, 3, -4)$.
    (d) Un vector de $\mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a $v = (-1, 0, 2)$ y de norma 2. ¿Es único?
    (e) Dos vectores ortogonales a $v = (3, 2, 7)$ que no sean colineales (es decir, que no sean uno múltiplo del otro).

14. Hallar el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:

    (a) $v = (1, 0); \quad w = (0, 1)$.
    (b) $v = (1, 1); \quad w = (0, 1)$.
    (c) $v = (1, 2); \quad w = (-2, 1)$.
    (d) $v = (1, -1, 0); \quad w = (0, 1, 1)$.

15. Dados $u = (3, 2, -1)$ y $v = (0, 1, 2)$ determinar:

    (a) el ángulo entre ambos vectores.
    (b) el módulo de $u,\ v$ y $u - v$.

16. Sean u y v en $\mathbb{R}^3$ dos vectores que satisfacen $\|u\| = 1$ y $\|v\| = 3$. ¿Es posible que $u \cdot v = 5$? Justificar.

17. Calcular el producto vectorial $w = u \times v$ para los siguientes pares de vectores:

    (a) $u = (1, -2, -4); \quad v = (1, -2, -4)$.
    (b) $u = (1, -2, -4); \quad v = (2, 1, -3)$.
    (c) $u = (2, 1, -3); \quad v = (1, -2, -4)$.
    (d) $u = (2, 0, 0); \quad v = (0, 0, 3)$.

    En cada caso, verificar que w es ortogonal tanto a u como a v.

18. Sean $u = (1, 2, -3),\ v = (-1, 5, 2),\ w = (1, 2, 4)$ y $z = (2, -4, 8)$. Hallar en $\mathbb{R}^3$:

    (a) un vector no nulo que sea, simultáneamente, ortogonal a u y v. ¿Es único?
    (b) todos los vectores que son, simultáneamente, ortogonales a w y z.
    (c) un vector de norma 2 que sea, simultáneamente, ortogonal a w y z. ¿Es único?