

## Análisis II—Análisis matemático II—Matemática 3.

### Curso de verano de 2011

#### Práctica 4 - Teoremas de Stokes y de Gauss. Campos conservativos. Aplicaciones.

**Ejercicio 1.** Verificar el teorema de Stokes para el hemisferio superior  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ,  $z \geq 0$ , y el campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $S$  la superficie cilíndrica con tapa, que es unión de dos superficies  $S_1$  y  $S_2$ ; donde  $S_1$  es el conjunto de  $(x, y, z)$  con  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$  y  $S_2$  es el conjunto de  $(x, y, z)$  con  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ ,  $z \geq 1$ , orientadas con la normal que apunta hacia afuera del cilindro y de la esfera respectivamente. Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$ . Calcular  $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ .

**Ejercicio 3.**

1. Considerar dos superficies  $S_1$  y  $S_2$  con la misma frontera  $\partial S$ . Describir, mediante dibujos, cómo deben orientarse  $S_1$  y  $S_2$  para asegurar que

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

2. Deducir que si  $S$  es una superficie cerrada, entonces

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

3. Calcular  $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ , donde  $S$  es el elipsoide  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ , y  $\mathbf{F} = (\sin xy, e^x, -yz)$ .

**Ejercicio 4.** Estudiar la aplicabilidad del teorema de Stokes al campo  $\mathbf{F} = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$  y la superficie  $S$ , en cada uno de los siguientes casos:

1.  $S =$  círculo de radio  $a > 0$  centrado en el origen en el plano  $z = 0$ .
2.  $S =$  región del plano  $z = 0$  entre  $x^2 + y^2 = 1$  y  $x + y = 1$ .

**Ejercicio 5.** Dado el campo de fuerzas gravitacional  $\mathbf{F} = -GmM \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|^3}$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ ,

1. Hallar el trabajo realizado por  $F$  cuando el punto de aplicación de  $\mathbf{F}$  se desplaza de  $(1, 1, 1)$  a  $(2, 2, 2)$  a lo largo de
  - a) el segmento que une los dos puntos
  - b) una poligonal formada por aristas paralelas a los ejes del cubo del cual  $(1, 1, 1)$  y  $(2, 2, 2)$  son vértices opuestos diagonalmente.
2. Comprobar que la integral curvilínea sólo depende de los puntos inicial y final. Calcular  $\nabla \times \mathbf{F}$  y hallar una función potencial  $f : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  para  $\mathbf{F}$ .

**Ejercicio 6.** Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales  $\mathbf{F}$  en el plano es el gradiente de una función escalar  $f$ . Si existe dicha  $f$ , hallarla.

1.  $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ .
2.  $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$ .
3.  $\mathbf{F}(x, y) = (\cos xy - xy \sin xy, x^2 \sin xy)$ .

**Ejercicio 7.** Evaluar  $\int_C \mathbf{F} \cdot ds$ , donde

1.  $\mathbf{F} = (2xyz + \sin x, x^2z, x^2y)$ , y  $C$  es la curva que está parametrizada por  $(\cos^5 t, \sin^3 t, t^4)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .
2.  $\mathbf{F} = (\cos xy^2 - xy^2 \sin xy^2, -2x^2y \sin xy^2, 0)$ , y  $C$  es la curva parametrizada por  $(e^t, e^{t+1}, 0)$ ,  $-1 \leq t \leq 0$ .

**Ejercicio 8.** Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} (y + \operatorname{sen} x) dx + \left(\frac{3}{2}z^2 + \cos y\right) dy + 2x^3 dz,$$

donde  $\mathcal{C}$  es la curva orientada parametrizada por  $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Sugerencia: Observar que  $\mathcal{C}$  se encuentra en la superficie  $z = 2xy$ .

**Ejercicio 9.** Sea  $f \in C^1(B)$  donde  $B$  es una bola en  $\mathbb{R}^3$ . Deducir que si  $\nabla f = 0$  en  $B$  se sigue que  $f$  es constante en  $B$ .

**Ejercicio 10.** Calcular la integral de línea  $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  donde  $\mathbf{F}$  es el campo vectorial definido por:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2, x^2 - 2yz, 2xz - y^2)$$

y  $\mathcal{C}$  es la curva que está contenida en la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y el plano de ecuación  $y = x$  recorrida desde el punto  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$  al polo norte.

**Ejercicio 11.** Rehacer el ejercicio 15) de la Práctica 3, usando el Teorema de Gauss.

**Ejercicio 12.** Calcular  $\int_S (x + y + z) dS$  donde  $S$  es el borde de la bola unitaria, es decir

$$S = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

**Ejercicio 13.** Analizar la aplicabilidad del Teorema de Gauss para el campo gravitatorio  $\mathbf{F} = -GMm\frac{\mathbf{r}}{r^3}$  donde  $\mathbf{r}$  es el vector que apunta de la posición de la masa  $m$  a la  $M$ ,  $r$  es su longitud y  $G$  es la constante gravitatoria, considerando como región  $\Omega$  la bola unitaria en  $\mathbb{R}^3$ .

**Ejercicio 14.** Calcular  $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , siendo  $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$  y  $S$  la esfera de radio  $R$  con la normal que apunta hacia adentro.

**Ejercicio 15.** Sea  $\mathcal{C}$  la curva en el plano  $xz$  dada en polares por:

$$r(\varphi) = \frac{4\sqrt{3}}{9} (2 - \cos(2\varphi)) \quad \text{para } \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}$$

(aquí  $\varphi$  es el ángulo que forma el radio vector con el semieje positivo de las  $z$ ). Sea  $S$  la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje  $z$ .

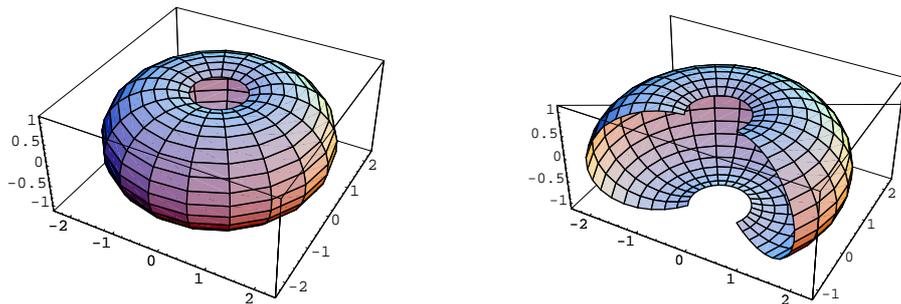


FIGURA 1

En el primer dibujo se muestra la superficie  $S$ , en el segundo se realizó un corte de la misma para que se aprecie mejor su forma.

Calcular el **flujo** a través de  $S$  en el sentido “externo” del campo

$$F(x, y, z) = (x, y, -2z).$$

**Ejercicio 16.** Calcular el flujo del campo  $F(x, y, z) = (0, 0, a^2 - x^2 - y^2)$  a través de las siguientes secciones oblicuas del cilindro  $x^2 + y^2 \leq a^2$ :

1. Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación  $y + z = 1$ , de modo que la normal en el punto  $(0, 0, 1)$  apunte en la dirección  $(0, 1, 1)$ .
2. Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación  $z = 0$ , de modo que la normal en el punto  $(0, 0, 0)$  apunte en la dirección  $(0, 0, 1)$ .

¿Depende el flujo del área de la sección?. Justifique.

**Ejercicio 17.** Dada la función  $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2-2x}$  podemos describir la superficie de la calabaza de un mate como la superficie de rotación alrededor del eje  $z$  de la curva  $x = f(z)$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

Para una idea gráfica ver la figura.

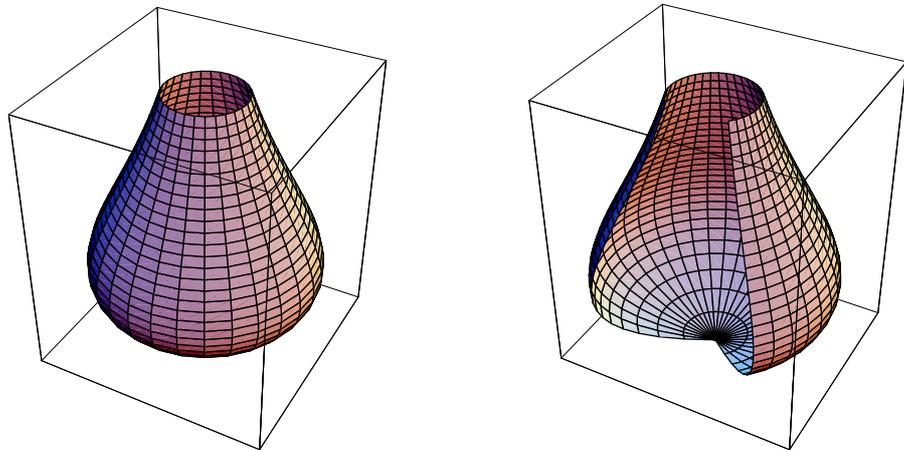


FIGURA 2

Cuando el mate se encuentra cargado de yerba y de agua caliente, el calor es un campo dado por

$$F(x, y, z) = \left( x, y, z - \frac{1}{2} \right)$$

Calcular el flujo térmico saliente que atraviesa la superficie de la calabaza del mate.

**Ejercicio 18.** Sea  $\mathcal{S}$  la superficie dada por el gráfico de la función  $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$  con  $\|(x, y)\| \leq 1$  y sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = \left( \frac{zx}{x^2 + y^2}, \frac{zy}{x^2 + y^2}, 0 \right)$ . Hallar

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

*Piense antes de actuar.*

**Ejercicio 19.** Se sabe que  $\text{div rot } \mathbf{G} = 0$  para todo campo vectorial  $\mathbf{G} \in C^1$ . Además, si  $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$  es tal que  $\text{div } \mathbf{F} = 0$  en  $\mathbb{R}^3$ , existe  $\mathbf{G} \in C^2(\mathbb{R}^3)$  tal que  $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$ . Por ejemplo, tomar

$$G_1(x, y, z) = \int_0^z F_2(x, y, t) dt - \int_0^y F_3(x, t, 0) dt,$$

$$G_2(x, y, z) = - \int_0^z F_1(x, y, t) dt,$$

$$G_3(x, y, z) = 0.$$

Considerar el campo gravitatorio  $\mathbf{F} = -GmM\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ . Verificar que  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ . ¿Existe un campo  $\mathbf{G} \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$  tal que  $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$ ?

Sugerencia: Ver Ejercicio 3.

**Ejercicio 20.** ¿Es cada uno de los siguientes campos vectoriales el rotor de algún otro campo vectorial? De ser así, hallar el campo vectorial.

1.  $\mathbf{F} = (x, y, z)$ .
2.  $\mathbf{F} = (x^2 + 1, x - 2xy, y)$ .

**Ejercicio 21.** Para cada  $R > 0$  sea  $S_R = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$  orientada con la normal que apunta hacia arriba, y sea el campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz - x \cos z, -yz + y \cos z, 4 - x^2 - y^2).$$

Determinar  $R$  de modo que el flujo del campo  $\mathbf{F}$  a través de  $S_R$  sea máximo.

**Ejercicio 22.** Sea  $\mathbf{V} = (x, y, xy - z)$  el campo de velocidades de un fluido. Decidir si el fluido se está expandiendo.

**Ejercicio 23.** Calcular la cantidad de calor total que se pierde entre los tiempos  $t = 0$  y  $t = 1$  a través de las paredes, el techo y el suelo de una habitación que ocupa la región  $[0, 4] \times [0, 5] \times [0, 3]$  del espacio si la temperatura ambiente en el punto  $(x, y, z)$  en el instante  $t$  es  $T = 30 - t - x^2 - y^2 - z^2$ . (Suponemos que no hay fuentes ni pérdidas de calor dentro de la habitación y que la conductividad térmica del ambiente es 1).

Sugerencia: Utilizar la Ley de Fourier que dice que el flujo por unidad de tiempo de la densidad de calor es  $-K\nabla T$  donde  $K$  es la conductividad térmica. Aquí,  $\nabla T$  es el gradiente en las variables espaciales.

**Ejercicio 24.** Sea  $\rho$  la densidad de masa de un fluido que se mueve según un campo de velocidades  $\mathbf{V}$ . Ver que la razón de variación en el tiempo de la densidad de masa  $\rho$  es  $\rho_t = -\operatorname{div}(\rho\mathbf{V})$ .

**Ejercicio 25.** Usando el teorema de Gauss, probar las *Identidades de Green*:

$$\int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dx \, dy \, dz,$$

$$\int_{\partial\Omega} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) \, dx \, dy \, dz.$$

Aquí  $\mathbf{n}$  es la normal exterior al dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ,  $f, g$  son de clase  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  y, para una función  $u \in C^2(\Omega)$ ,  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ .

**Ejercicio 26.** Decimos que  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un autovalor del operador  $\Delta$  del Ejercicio 26 en  $\Omega$  si existe una función  $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  con  $f = 0$  en  $\partial\Omega$ ,  $f \neq 0$  tal que  $\Delta f = \lambda f$  en  $\Omega$ . En ese caso decimos que  $f$  es una autofunción asociada a  $\lambda$ .

Utilizando las identidades de Green del Ejercicio 25, mostrar que si  $\lambda \neq \mu$  son autovalores de  $\Delta$  en  $\Omega$  y  $f$  y  $g$  son autofunciones asociadas a  $\lambda$  y  $\mu$  respectivamente se tiene

$$\iiint_{\Omega} f g \, dV = 0.$$

**Ejercicio 27.** Sea  $B$  una bola en  $\mathbb{R}^3$ . Ver que no puede haber una función  $f \neq 0$ ,  $f \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$  que satisfaga

$$\Delta f = 0 \quad \text{en } B, \quad f = 0 \quad \text{en } \partial B.$$

Sugerencia: Utilizar las identidades de Green del Ejercicio 25 para deducir que  $\nabla f = 0$  en  $B$ . A continuación utilizar el Ejercicio 9 para deducir que  $f$  es constante.

**Ejercicio 28.** Se sabe que la circulación de un campo eléctrico genera una variación en el flujo del campo magnético de modo que se tiene la relación

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{Ley de Faraday})$$

donde  $c$  es una constante positiva,  $S$  es una superficie orientada cuyo borde es  $\mathcal{C}$  y la circulación se da en el sentido de recorrido de  $\mathcal{C}$  inducido por la normal elegida sobre  $S$ .

Deducir que se tiene

$$\mathbf{H}_t + c \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0.$$

Sugerencia: Considerar un disco de radio  $\rho$  en un plano como superficie  $S$ . Aplicar el Teorema de Stokes, dividir por el área del disco, hacer  $\rho$  tender a 0 y posteriormente utilizar que el plano era arbitrario.