

Análisis II—Análisis matemático II—Matemática 3.

Curso de verano de 2011

Práctica 2 - Teorema de Green.

Ejercicio 1. Verificar el Teorema de Green para el disco D con centro $(0, 0)$ y radio R y las siguientes funciones:

1. $P(x, y) = xy^2$, $Q(x, y) = -yx^2$.
2. $P(x, y) = 2y$, $Q(x, y) = x$.

Ejercicio 2. Verificar el Teorema de Green y calcular $\int_{\mathcal{C}} y^2 dx + x dy$, para cada una de las siguientes curvas \mathcal{C} recorridas en sentido positivo:

1. Cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$.
2. Elipse dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
3. $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, donde $\mathcal{C}_1 : y = x$, $x \in [0, 1]$, y $\mathcal{C}_2 : y = x^2$, $x \in [0, 1]$.

Ejercicio 3. Usando el teorema de Green, hallar el área de:

1. El disco D con centro $(0, 0)$ y radio R .
2. La región dentro de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ejercicio 4. Sea D la región encerrada por el eje x y el arco de cicloide:

$$x = \theta - \sin \theta, \quad y = 1 - \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Usando el teorema de Green, calcular el área de D .

Ejercicio 5. Hallar el área entre las curvas dadas en polares por

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos \theta && \text{con } -\pi \leq \theta \leq \pi, \\ r &= \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} && \text{con } -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ejercicio 6. Probar la fórmula de integración por partes: Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio elemental, ∂D su frontera orientada en sentido antihorario y $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ la normal exterior a D , entonces

$$\int_D u v_x dx dy = - \int_D u_x v dx dy + \int_{\partial D} u v n_1 ds,$$

para todo par de funciones $u, v \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$.

Ejercicio 7. Sean P y Q funciones continuamente diferenciables en \mathbb{R}^2 . Verificar que el Teorema de Green para estas funciones es válido cuando la región D es el anillo

$$D = \{(x, y) / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Sugerencia: Aplicar el Teorema de Green en los discos de radios 1 y 2.

Ejercicio 8. Sea \mathcal{C} la curva

$$\begin{aligned} x &= 0, && 0 \leq y \leq 4, \\ y &= 4, && 0 \leq x \leq 4, \\ y &= x, && 0 \leq x \leq 1, \\ y &= 2 - x, && 1 \leq x \leq 2, \\ y &= x - 2, && 2 \leq x \leq 3, \\ y &= 4 - x, && 2 \leq x \leq 3, \\ y &= x, && 2 \leq x \leq 4, \end{aligned}$$

orientada positivamente. Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} dx + \frac{1-x}{(x-1)^2 + y^2} dy.$$

Ejercicio 9. Sea $D = \{(x, y) / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$. Calcular

$$\int_{\partial D} x^2 y dx - x y^2 dy.$$

Como siempre, ∂D está recorrido en sentido directo (el contrario a las agujas del reloj).

Ejercicio 10. Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $F(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ al mover una partícula rodeando una vez la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ en el sentido de las agujas del reloj.

Ejercicio 11. Sea $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$. Calcular $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds$ donde \mathcal{C} es la circunferencia unitaria centrada en el origen orientada positivamente. Calcular $Q_x - P_y$. ¿Se satisface en este caso el Teorema de Green?

Ejercicio 12. Calcular $\int_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy$ siendo

$$f_1(x, y) = \frac{x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2(x^2 + y^2)} - y(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_2(x, y) = \frac{y \operatorname{sen} \frac{\pi}{2(x^2 + y^2)} + x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

y

$$\mathcal{C} = \begin{cases} y = x + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ y = 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

recorrida del $(-1, 0)$ al $(1, 0)$.

Ejercicio 13. Determinar todas las circunferencias \mathcal{C} en el plano \mathbb{R}^2 sobre las cuales vale la siguiente igualdad

$$\int_{\mathcal{C}} -y^2 dx + 3x dy = 6\pi.$$

Ejercicio 14. Calcular la integral $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds$ donde

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 e^x + \cos x + (x - y)^2, 2y e^x + \operatorname{sen} y),$$

y \mathcal{C} es la curva

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0,$$

orientada de manera tal que comience en $(1, 0)$ y termine en $(-1, 0)$.

Ejercicio 15. Sean $u, v \in C^1(D)$ donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$. Consideremos los campos definidos por $\mathbf{F}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, $\mathbf{G}(x, y) = (v_x - v_y, u_x - u_y)$. Calcular

$$\iint_D (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(x, y) dx dy$$

sabiendo que sobre el borde de D se tiene $u(x, y) = x$; $v(x, y) = 1$.