Análisis II–Análisis matemático II–Matemática 3.

Curso de verano de 2011

Práctica 1 - Curvas, integral de longitud de arco e integrales curvilíneas.

Curvas

Ejercicio 1

1. Probar que

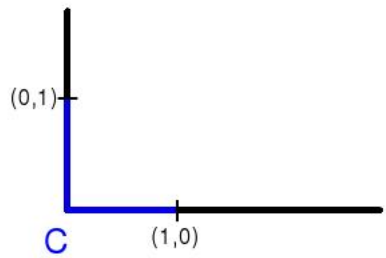
$$\begin{cases} x_1(t) = r\cos 2\pi t \\ \\ y_1(t) = r\,\mathrm{sen}\, 2\pi t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1 \qquad\qquad \begin{cases} x_2(t) = r\cos 4\pi t \\ \\ y_2(t) = r\,\mathrm{sen}\, 4\pi t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

   son dos parametrizaciones C^1 de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio r.

2. Probar que la circunferencia es una curva cerrada, simple y suave.

3. Probar que $\sigma_2(t) = \big(x_2(t), y_2(t)\big)$, $t \in [0,1]$ no es una parametrización regular.

Ejercicio 2 Considerar la curva $\mathcal{C}$ formada por los segmentos que unen el $(0,1)$ con el $(0,0)$ y el $(0,0)$ con el $(1,0)$.



Probar que

$$\sigma(t) := \begin{cases} \big(0, (1-t)^2\big) & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ \big((t-1)^2, 0\big) & \text{si } 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

es una parametrización C^1 de la curva $\mathcal{C}$.

Observar que $\mathcal{C}$ no tiene recta tangente en el $(0,0)$. ¿Por qué no hay contradicción?

Ejercicio 3 Sea $\sigma(t) = (t^3, t^3)$ con $-1 \le t \le 1$.

Probar que σ es una parametrización C^1 del segmento $y = x$ con $-1 \le x \le 1$, que es una curva suave.

Observar que $\sigma'(0) = (0,0)$.

Ejercicio 4 Sea $\mathcal{C}$ el arco de parábola $y = x^2$ con $0 \leq x \leq 1$.

1. Probar que $\mathcal{C}$ es una curva abierta, simple y suave.
2. Probar que $\bar{\sigma}(s) := \big(\bar{x}(s), \bar{y}(s)\big)$ dada por

$$\begin{cases} \bar{x}(s) = e^s - 1 \\ \\ \bar{y}(s) = (e^s - 1)^2 \end{cases} \qquad\qquad 0 \leq s \leq \ln 2$$

   es una parametrizacíón regular de $\mathcal{C}$.
3. Observar que $\sigma(t) := (t, t^2)$ con $t \in [0,1]$ es otra parametrización regular.
4. Hallar una función $g : [0,1] \to [0, \ln 2]$ tal que $\bar{\sigma}\big(g(t)\big) = \sigma(t)$ para todo $t \in [0,1]$.
   Observar que g es biyectiva y C^1.

Ejercicio 5 Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada, simple, suave y $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Sean $\bar{a} \in (a,b)$ y $\bar{b} = \bar{a} + b - a$. Consideremos la función $\bar{\sigma} : [\bar{a}, \bar{b}] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\bar{\sigma}(s) = \begin{cases} \sigma(s) & \text{si } s \in [\bar{a}, b] \\ \sigma\big(a + (s - b)\big)) & \text{si } s \in [b, \bar{b}] \end{cases}.$$

Probar que $\bar{\sigma}$ es una parametrización regular de $\mathcal{C}$ (que recorre la curva $\mathcal{C}$ desde y hasta el punto $\sigma(\bar{a})$).

Ejercicio 6 Sea $\mathcal{C}$ una curva simple y suave. Sea $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Sea $[a_1, b_1]$ un intervalo arbitrario. Consideremos la función $\sigma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\sigma_1(s) = \sigma\Big(a + \frac{b-a}{b_1 - a_1}(s - a_1)\Big).$$

Probar que $\bar{\sigma}$ es una parametrización regular de $\mathcal{C}$.

Ejercicio 7 Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente para cada una de las curvas cuyas parametrizaciones se dan a continuación, en el valor especificado de t.

1. $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3), \quad t = 0.$
2. $\sigma(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t), \quad t = 0.$
3. $\sigma(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{3}{2}}), \quad t = 1.$
4. $\sigma(t) = (0, 0, t), \quad t = 1.$

Ejercicio 8 ¿Qué fuerza actúa sobre una partícula de masa m en el instante $t = 0$ si sigue la trayectoria dada por la función σ del Ejercicio 7.1?

Ejercicio 9 Suponer que una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ hasta que sale por una tangente en $t = 1$. Hallar la ubicación de la partícula en $t = 2$. Suponer que ninguna fuerza actúa sobre ella después del tiempo $t = 1$.

Integral de longitud de arco

Ejercicio 10 Considerar una partícula que se mueve siguiendo la trayectoria $\sigma(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$. Hallar la velocidad, rapidez, y la longitud del arco descripto por la partícula entre los puntos $\sigma(0)$ y $\sigma(1)$. Observar que σ describe la función de posición de un punto en un círculo de radio 1, que va rodando. La curva que describe se conoce como cicloide.

Ejercicio 11 En los siguientes casos, calcular la longitud de la curva, donde σ es una parametrización de la misma sobre el intervalo $[a, b]$, siendo:

1. $\sigma(t) = (t, t^2) \quad a = 0, \quad b = 1.$
2. $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t + 1, t) \quad a = 10 \quad b = 20.$

Ejercicio 12 Sea $\mathcal{C}$ la curva dada por

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \qquad t > 0 \\ z = b\, t \end{cases}$$

Parametrizar esta curva por longitud de arco.

Ejercicio 13 Evaluar las integrales de longitud de arco $\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\, ds$, donde σ es una parametrización de $\mathcal{C}$, en los casos siguientes

1. $f(x, y, z) = x + y + z, \quad \sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t), \quad t \in [0, 2\pi].$
2. $f(x, y, z) = \cos z, \quad \sigma$ como en la parte 1.
3. $f(x, y, z) = x \cos z, \quad \sigma(t) = (t, t^2, 0), \quad t \in [0, 1].$

Ejercicio 14

1. Mostrar que la integral de longitud de arco de $f(x, y)$ a lo largo de una curva dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

2. Calcular la longitud de la curva $r = 1 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Ejercicio 15 Suponer que la semicircunferencia parametrizada por:

$$\sigma(\theta) = (0, a\,\mathrm{sen}\,\theta, a\cos\theta), \qquad \theta \in [0, \pi],$$

con $a > 0$, está hecha de alambre con densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.

1. ¿Cuál es la masa total del alambre?
2. ¿Dónde está el centro de masa de esta configuración de alambre?
3. Si la temperatura ambiente es igual a $x + y - z$ en el punto (x, y, z), calcular la temperatura promedio sobre el alambre.

Ejercicio 16 Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable a trozos, el gráfico de f en $[a, b]$ es una curva que se puede parametrizar como $\sigma(t) = (t, f(t))$ para $t \in [a, b]$.

1. Mostrar que la longitud del gráfico de f en [a,b] es
$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$
2. Hallar la longitud del gráfico de $y = \log x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

Ejercicio 17 Se quiere pintar una cerca que se encuentra sobre un campo ondulado. La cerca se encuentra a una distancia variable de una ruta recta que supondremos que ocupa el eje y.

Pongamos el kilómetro 0 de la ruta a la altura del comienzo de la cerca. Esta se encuentra entre los kilómetros 0 y 1, a una distancia variable igual a $y(1 - y) + 1$ del kilómetro y de la ruta (calculada sobre el plano del nivel del mar).

El terreno puede describirse por medio de su altura sobre el nivel del mar. Con ese fin, describiremos el plano del nivel del mar en términos de la distancia x (en kilómetros) desde el punto a la ruta (sobre el plano) y del kilometraje y que le corresponde sobre la ruta. En estos términos, la altura z del terreno sobre el nivel del mar en los puntos (x, y) cercanos a la cerca es $(1 - y) + x$.

Nuestra cerca tiene altura variable $h = \frac{1+y}{750}$ a la altura del kilómetro y de la ruta si $0 \le y \le 1/2$ y $h = \frac{2-y}{750}$ si $1/2 \le y \le 1$.

Si 1 litro de pintura rinde $4\,m^2$ ¿Cuántos litros de pintura tengo que comprar?

Integrales curvilíneas

Ejercicio 18 Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Evaluar la integral curvilínea de $\mathbf{F}$ a lo largo de las curvas orientadas $\mathcal{C}$ dadas por las siguientes parametrizaciones:

1. $\sigma(t) = (t, t, t), \quad 0 \le t \le 1.$
2. $\sigma(t) = (\sin t, 0, \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$

Ejercicio 19 Para las curvas orientadas $\mathcal{C}$ parametrizadas por las correspondientes funciones σ, evaluar las integrales siguientes:

1. $\int_{\mathcal{C}} x\, dy - y\, dx, \quad \sigma(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$

2. $\int_{\mathcal{C}} x\,dx + y\,dy, \quad \sigma(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t)), \quad 0 \leq t \leq 2.$

Ejercicio 20 Considerar la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2$, $z = 0$, de $x = -1$ a $x = 2$.

Ejercicio 21 Sea $\mathcal{C}$ una curva orientada suave parametrizada por σ.

1. Suponer que $\mathbf{F}$ es perpendicular a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$ para todo t. Mostrar que
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

2. Si $\mathbf{F}$ es paralelo a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$ para todo t, mostrar que
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} ||\mathbf{F}||\, ds.$$
(Aquí, por paralelo a $\sigma'(t)$ se entiende que $\mathbf{F}\big(\sigma(t)\big) = \lambda(t)\sigma'(t)$, donde $\lambda(t) > 0$.)

Ejercicio 22 ¿Cuál es el valor de la integral curvilínea de un campo gradiente sobre una curva cerrada C?

Ejercicio 23 Suponer que $\nabla f(x, y, z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$. Si $f(0, 0, 0) = 5$, hallar $f(1, 1, 2)$.

Ejercicio 24 Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G = m = M = 1$) definido (para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$) por:
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z).$$
Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2), a lo largo de cualquier trayectoria, depende sólo de los radios $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

Ejercicio 25 Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función C^1, $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo C^1 y $\mathbf{F} = \nabla f + \mathbf{G}$. Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada, simple, suave y orientada. Verificar que
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}.$$