

Práctica 5

1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada partición π de $[a, b]$ (si $\pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$) se define

$$\pi(f) := \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$

Demostrar que si $\pi_1 \subset \pi_2$ son dos particiones de $[a, b]$, entonces $\pi_1(f) \leq \pi_2(f)$.

2. Estudiar si las funciones que siguen son de variación acotada en el intervalo $[a, b]$ correspondiente y en el caso afirmativo dar una mayoración para $V_f(a, b)$.

$$(a) f(x) = \cos(x) \text{ en } [0, 3\pi] \quad (b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = 2x^3 - 3x^2 \text{ en } [-1, 2] \quad (d) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)^2 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En el caso (d) estudiar también la derivabilidad de f .

3. Demostrar que si f y g son funciones de variación acotada en $[a, b]$ entonces fg también lo es.
4. Para las funciones de variación acotada que siguen, hallar la función V_f (recordamos que $V_f(a) = 0$ y $V_f(x) = V_f(a, x)$ si $a < x \leq b$):

$$(a) f(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad (b) f(x) = \sin x \text{ en } [0, 2\pi]$$

Para cada función encontrar explícitamente funciones monótonas crecientes g_1 y g_2 tales que $f = g_1 - g_2$.

5. Demostrar que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de variación acotada entonces es integrable Riemann.
6. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en $[a, b]$. Demostrar que f es de variación acotada y que vale la igualdad $V_f(a, b) = \int_a^b |f'(x)| dx$.

7. Analizar en cada caso la existencia de $\int_a^b f d\alpha$ y calcularla cuando corresponda.

(a) $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria y f una función constante sobre $[a, b]$.

- (b) $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con $\alpha(a) = a_0$, $\alpha(b) = b_0$; $c \in (a, b)$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) := \begin{cases} 5 & \text{si } x \in [a, c) \\ 3 & \text{si } x = c \\ -1 & \text{si } x \in (c, b] \end{cases}$.

¿Qué sucede si en lugar de tomar α continua sólo se sabe que α es continua en un entorno de c ?

- (c) f como en el ítem anterior y $\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, c] \\ -1 & \text{si } x \in (c, b] \end{cases}$.
- (d) $f(x) = x^3$, $\alpha(x) = x^2$ y $[a, b] = [-1, 3]$.
- (e) $f(x) = \alpha(x) = \cos(x)$ y $[a, b] = [0, \frac{\pi}{4}]$.

8. Sean $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tales que f es continua e integrable respecto de α en $[a, b]$ y sea $c \in (a, b)$. Si $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisface $\beta(x) = \alpha(x)$ para todo $x \neq c$, probar que $f \in \mathfrak{R}(\beta)$ en $[a, b]$ y $\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\beta$.

¿Qué sucede si $c = a$ o $c = b$?

9. Dadas las funciones siguientes definidas en el intervalo $[0, 2]$: $f(x) = |x - 1|$, $\alpha(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x = 0 \\ e^x & \text{si } x \in (0, 2] \end{cases}$, demostrar que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ en $[0, 2]$ y calcular $\int_0^2 f d\alpha$.
10. Sean $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $c \in (a, b)$ tales que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ en $[a, c]$ y $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ en $[c, b]$. Demostrar que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ en $[a, b]$ y $\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha$.

11. Supongamos que $\int_a^b f d\alpha$ existe y es igual a 0 para toda función monótona creciente f . ¿Qué puede decir sobre la función α ?

Sugerencia. Para cada $c \in [a, b]$ considere la función monótona f_c definida como $f_c(x) = 0$ si $a \leq x \leq c$ y $f_c(x) = 1$ sino.

12. Sean $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada partición $\pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$, se define $s_\pi := \sum_{k=1}^n f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Demostrar que si $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ entonces existe una sucesión de particiones $(\pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ que cumple las condiciones:

- (a) $(\pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es monótona en el sentido siguiente: si $m < m'$ entonces $\pi_m \subset \pi_{m'}$.
- (b) $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\pi_m\| = 0$.
- (c) $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{\pi_m} = \int_a^b f d\alpha$, independientemente de la elección de los t_k en cada suma s_{π_m} .
- (d) Toda otra sucesión $(\sigma_m)_{m \in \mathbb{N}}$ monótona de particiones tal que $\pi_m \subset \sigma_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande cumple las condiciones (b) y (c) precedentes.

Si ahora $g, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son otras funciones, tales que $g \in \mathfrak{R}(\beta)$ y para cada partición π notamos $r_\pi := \sum_{k=1}^n g(t_k)[\beta(x_k) - \beta(x_{k-1})]$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, deducir que entonces existe una sucesión de particiones $(\pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{\pi_m} = \int_a^b f d\alpha$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} r_{\pi_m} = \int_a^b g d\beta$.

13. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente. Demostrar que si $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ en $[a, b]$ y $[c, d] \subset [a, b]$, entonces $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ en $[c, d]$.
14. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente.
- (a) Demostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^b f d\alpha = f(c)(\alpha(b) - \alpha(a))$.
- (b) Suponiendo que α es además derivable en (a, b) , (pero no necesariamente de clase C^1), demostrar que la función

$$\psi(x) = \int_a^x f d\alpha$$

es derivable en (a, b) y que $\psi'(x) = f(x)\alpha'(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

15. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente. Demostrar que si $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b g d\alpha$.

Deducir que si $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ entonces $\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq \int_a^b |f| d\alpha$.

16. Para cada $x \in \mathbb{R}$ vamos a notar con $\lfloor x \rfloor$ a la parte entera de x , es decir: $\lfloor x \rfloor := \max \{n \in \mathbb{Z} / n \leq x\}$.

Analizar la existencia de las integrales que siguen y en caso afirmativo calcularla:

$$(a) \int_0^4 x^2 d(\lfloor x \rfloor) \quad (b) \int_0^2 x d(x - \lfloor x \rfloor) \quad (c) \int_0^2 x^2 d(\lfloor x \rfloor)$$

17. Sea $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que f es una función continua y α es de variación acotada.
- (a) Demostrar que $|f| \in \mathfrak{R}(V_\alpha)$.
- (b) Demostrar que vale la desigualdad $\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq \int_a^b |f| dV_\alpha$. *Sugerencia.* Tener en cuenta el Ejercicio 12.
- (c) Deducir de (b) que $\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq V_\alpha(a, b) \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$.
- (d) Para cada $x \in [a, b]$ se define $\psi(x) = \int_a^x f d\alpha$ (observar que ψ está bien definida). Probar que ψ es de variación acotada.
- (e) Si α es Lipschitz en $[a, b]$, probar que la función ψ definida en el ítem anterior también es Lipschitz en $[a, b]$.