Práctica 3

1. Decir qué propiedades (abierto, cerrado, acotado) tienen los siguientes conjuntos:

   a) $\mathbb{Q}$.
   b) $\mathbb{N}$.
   c) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
   d) $(0, 1]$.
   e) $\left\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
   f) $\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

2. Sean S, T subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Demostrar las propiedades siguientes:

   a) Si $S \subseteq T$ entonces $S^\circ \subseteq T^\circ$.
   b) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una intersección infinita?
   c) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. ¿Vale la igualdad?
   d) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?
   e) $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. ¿Vale la igualdad?
   f) $(\mathbb{R}^n \setminus S)^\circ = \mathbb{R}^n \setminus \overline{S}$.

3. En cada uno de los siguientes casos hallar $S^\circ, \overline{S}$ y ∂S.

   a) $S = [0, 1]$.
   b) $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
   c) $S = [-1, 0) \cup \{1\}$.
   d) $S = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.
   e) $\left\{\frac{(-1)^n n}{1+n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
   f) $S = \mathbb{Z}$.

4. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$. Demostrar :

   a) S es abierto si y solo si es disjunto con ∂S.
   b) S es cerrado si y solo si $\partial S \subset S$.
   c) S es cerrado si y solo si $S = S^\circ \cup \partial S$.

5. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Demostrar que $\partial S = \overline{S} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus S}$. Interpretar gráficamente.

6. Si $S \subseteq \mathbb{R}$, notamos con S' al conjunto de todos los puntos de acumulación de S.

   a) Hallar S' para cada uno de los conjuntos del Ejercicio 3.
   b) Un punto $p \in S$ se dice *punto aislado* de S si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \cap S = \{p\}$. Demostrar que $\overline{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$.

7. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \left\{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) : n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

8. Hallar todos los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ que son a la vez abiertos y cerrados.

9. Decir qué propiedades (abierto, cerrado, acotado) tienen los siguientes conjuntos.

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 1\}$.

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > y\}$.

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy > 0\}$.

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = y\}$.

10. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}$. Hallar la adherencia $\overline{S}$.

11. Sea $U_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \parallel (x,y) - (0,n) \parallel_2 < n\}$. Demostrar que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es el semiplano superior abierto.

12. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se considera el intervalo abierto $I_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$. Demostrar que $(0,1) = \bigcup\limits_{n\geq 2} I_n$. ¿Existe un conjunto *finito* $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $(0,1) = \bigcup\limits_{n\in\mathcal{F}} I_n$? Justificar. ¿Qué puede decir sobre la compacidad del conjunto $(0,1)$?

13. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son compactos:

    a) $\mathbb{Q}$.

    b) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

    c) $\mathbb{R}$.

    d) $[0,1] \cup [100, 1000]$.

    e) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

    f) $\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

14. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Probar que K tiene mínimo y máximo.

15. Sean $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos. Demostrar que $S \cup T$ y $S \cap T$ son compactos. ¿Qué ocurre si se toman uniones o intersecciones infinitas?

16. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Demostrar que S es compacto si y sólo si toda sucesión contenida en S contiene una subsucesión que converge a un punto de S.

17. Mostrar que si K es compacto y F es cerrado, entonces $K \cap F$ es compacto.

18. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto. Probar que los siguientes conjuntos también son compactos: $S = \{x + y : x, y \in K\}$, $P = \{x \cdot y : x, y \in K\}$.

19. Una *norma* sobre $\mathbb{R}^n$ es una función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que:

    - $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\|x\| = 0$ si y solamente si $x = 0$;
    - $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$;
    - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo x, $y \in \mathbb{R}^n$.

    a) Muestre que las funciones $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas por

    $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \qquad \|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

    para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ son normas. Si $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una norma, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y cada $\varepsilon > 0$ llamamos *bola centrada en x de radio ε* al conjunto

    $$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

b) Muestre que existen constantes positivas c, c', d, d' tales que

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c'\|x\|_1, \qquad d\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq d'\|x\|_\infty$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Sugerencia: Primero resuelva el problema en el caso $n = 2$. Dibuje las bolas de radio 1 centradas en cero para las tres normas.

c) Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto con respecto a $\|\cdot\|$ si para todo $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq A$. Muestre que un conjunto es abierto con respecto a $\|\cdot\|_1$ si y solo si es abierto con respecto a $\|\cdot\|_2$, si y solo si es abierto con respecto a $\|\cdot\|_\infty$.

d) Si $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una norma, decimos que una sucesión $(x_k)_{k\geq 1}$ en $\mathbb{R}^n$ converge a $x \in \mathbb{R}^n$ con respecto a $\|\cdot\|$ si

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0.$$

Muestre que una sucesión $(x_k)_{k\geq 1}$ converge a $x \in \mathbb{R}^n$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_1$ si y solo si lo hace con respecto a la norma $\|\cdot\|_2$, si y solo si lo hace con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$.