

Práctica 1

1. A partir de los axiomas de cuerpo demostrar las siguientes propiedades cualesquiera sean a, b, c y d en \mathbb{R} :

- (a) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.
- (b) Si $ab = ac$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$.
- (c) Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.
- (d) $(-a)b = -(ab)$ y $(-a)(-b) = ab$.
- (e) $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

2. A partir de los axiomas de cuerpo ordenado probar las siguientes propiedades cualesquiera sean a, b y c en \mathbb{R} :

- (a) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
- (b) Si $a < b$ entonces $-b < -a$.
- (c) Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.
- (d) Si $ab > 0$ entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos.
- (e) Si $a^2 + b^2 = 0$, entonces se tiene que $a = b = 0$.
- (f) Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

3. Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R} acotado superiormente. Probar que son equivalentes las siguientes definiciones alternativas del supremo de A .

- (a) s verifica que:
 - i. $\forall a \in A$ se tiene $s \geq a$;
 - ii. si $t \geq a$ para todo $a \in A$, entonces $t \geq s$.
- (b) s verifica que:
 - i. $\forall a \in A$, se tiene $s \geq a$;
 - ii. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$ tal que $s - \varepsilon < a_\varepsilon$.
- (c) s verifica que:
 - i. $\forall a \in A$, se tiene $s \geq a$;
 - ii. existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida A tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$.

Enunciar equivalencias análogas para el ínfimo.

4. Sean A y $B \subseteq \mathbb{R}$, dos conjuntos no vacíos, tales que $A \subseteq B$.

- (a) Suponiendo que A y B están acotados superior e inferiormente, establecer y demostrar las relaciones de orden entre los números $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\sup(B)$, $\inf(B)$.
- (b) ¿Qué sucede cuando A o B no está acotado superior o inferiormente?
5. Hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} :
- (a) $A_1 = (a, b]$.
- (b) $A_2 = \left\{ \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \right\}$.
- (c) $A_3 = A_2 \cup \{0\}$.
- (d) $A_4 = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$.
- (e) $A_5 = \{x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R}\}$.
- (f) $A_6 = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$.
- (g) $A_7 = \{x^2 - 5x + 4 : x \in [2, 4)\}$.
6. Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío se definen, para cada $c \in \mathbb{R}$, $c.A = \{c.x : x \in A\}$ y $-A = (-1).A$.
- (a) Probar que si A está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente y vale $\inf(-A) = -\sup A$.
- (b) Probar que si $c > 0$ y A está acotado superiormente, entonces $c.A$ también lo está y $\sup(c.A) = c \sup A$.
- (c) ¿Qué se puede decir en el caso que $c < 0$?
- (d) Enunciar resultados análogos a los anteriores para $\inf(c.A)$ (y demuestre alguno(s) si tiene ganas).
7. Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ambos no vacíos se definen
- $$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$
- $$A.B := \{ab : a \in A, b \in B\}$$
- (a) ¿Qué condiciones deben verificar A y B para que exista $\sup(A + B)$? Estudiar la relación entre $\sup(A + B)$ y $\sup(A) + \sup(B)$.
- (b) ¿Es posible dar resultados parecidos a los de la parte (a) para $A.B$ y los números $\sup(A.B)$ y $\sup(A) \cdot \sup(B)$? ¿Cuáles?
8. Si x es un número real arbitrario, probar que existe un único entero n tal que $n \leq x < n + 1$. Este n se denomina la *parte entera* de x y se designa por $[x]$.
9. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.
- (a) Probar que

- i. Si $r < L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r \forall n \geq n_0$.
 ii. Si $r > L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < r \forall n \geq n_0$.
- (b) ¿Puede reformularse (a) i. si se sabe que $r \leq L$?
 (c) ¿Qué puede decirse de L si se sabe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r \forall n \geq n_0$?
10. Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ estrictamente decreciente tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$.
11. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos. Si $\lim a_n = A$ probar que $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.
12. Definir una sucesión por $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$, para $n \geq 0$, con $b_1 = \sqrt{2}$. Probar que $\{b_n\}$ es monótona, acotada, y $b_n < 2$. Calcular $\lim b_n$.
13. Sean $x_1 > y_1 > 0$, y para $n \geq 0$, sean $x_{n+1} = (x_n + y_n)/2$, $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$. Mostrar que $y_n < y_{n+1} < x_1$, $y_1 < x_{n+1} < x_n$, $0 < x_{n+1} - y_{n+1} \leq (x_1 - y_1)/2^n$. Deducir entonces que $\lim x_n = \lim y_n$.
14. Hallar los puntos límites de las sucesiones:

(a) $1 - \frac{1}{n}$ (b) $(-1)^n$ (c) $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
 (d) $(-1)^n\left(2 + \frac{3}{n}\right)$ (e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots$ (f) $\frac{n + (-1)^n(2n + 1)}{n}$

15. Hallar los límites superior e inferior de las sucesiones del ejercicio anterior.
16. Se tienen sucesiones acotadas de números reales $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
 Enunciar y demostrar las relaciones de orden entre los cuatro números que siguen:

- $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$.

17. (a) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos tal que $\limsup(a_{n+1}/a_n) = \theta < 1$. Probar que $\lim a_n = 0$.
 (b) Usar el ítem anterior para probar que
 i. Si $\alpha < 0$ entonces $\lim(\alpha^n/n!) = 0$.
 ii. $\lim(n!/n^n) = 0$.
 iii. Si $0 < \alpha < 1$ y k es un entero, entonces $\lim n^k \alpha^n = 0$.
18. Sea $x_{n+1} = a/(1 + x_n)$ donde $x_1 > 0$ y $a > x_1^2 + x_1$. Probar que los intervalos $[x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots$ forman un encaje de intervalos, y que el único punto ξ común a todos ellos es una raíz de $x^2 + x = a$.
Sugerencia. Mostrar que $x_{n+1} - x_n$ y $x_n - x_{n-1}$ tienen diferentes signos, y $|x_{n+1} - x_n| \leq \theta |x_n - x_{n-1}|$ para algún $\theta < 1$.

19. Sea $\{I_n\}$ una sucesión de intervalos cerrados, y sea λ_n la longitud de I_n . Supongamos que $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$. Mostrar que (i) $\lim \lambda_n$ existe; (ii) Si $\lim \lambda_n > 0$ entonces $\cap I_n$ es un intervalo cerrado de longitud $\lim \lambda_n$.
20. Probar que un número M es el límite superior de una sucesión $\{a_n\}$ acotada superiormente si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ las siguientes propiedades valen:
- Existen infinitos n para los que $a_n > M - \varepsilon$;
 - Existe solamente una cantidad finita de n para los que $a_n > M + \varepsilon$.
21. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y $\{\sigma_n\}$ la sucesión de las medias aritméticas (promedios) definida como

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

- Decidir si las siguientes implicaciones son verdaderas o falsas:
 - $\lim a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$.
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0 \Rightarrow \lim a_n = 0$.
- Deducir de (a).i que si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales que converge a L entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n = L$.
- ¿Puede suceder que $\limsup a_n = \infty$ mientras que $\lim \sigma_n = 0$?
- Sea $b_n = a_{n+1} - a_n$. Demostrar que si $\lim \sigma_n = L$ y $\lim nb_n = 0$, entonces $\lim a_n = L$.
Sugerencia. Verificar que

$$a_n - \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} kb_k.$$