MATEMÁTICA 2 - Verano 2019

Práctica 2 - Espacios vectoriales

1. Mostrar que los siguientes son espacios vectoriales, verificando que son subespacios de espacios vectoriales conocidos. Explicitar la suma y el producto por escalares en cada caso.

   a) $K_n[X] := \{f \in K[X] \ : \ f = 0 \text{ ó } \mathrm{gr}(f) \leq n\}$, polinomios de grado a lo sumo n

   b) $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \ : \ A^t = -A\}$

   c) $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ : \ f''(1) = f(2)\}$, donde $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ son las funciones continuas infinitamente derivables

   d) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \ : \ \int_0^1 f(x)\, dx = 0\}$, donde $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ son las funciones continuas

2. Mostrar que $\{f \in K[X] \ : \ f = 0 \text{ ó } \mathrm{gr}(f) \geq 2\}$ no es un subespacio de $K[X]$.

3. Dados S, T subespacios de un espacio vectorial V, probar que $S \cup T$ es un subespacio de $V \iff S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$.

4. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales

   a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y - z = 0\,; \ x - y = 0\}$

   b) $\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \ : \ A = -A^t\}$

   c) $\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \ : \ \mathrm{tr}(A) = 0\}$

   d) $\mathbb{R}_n[X]$

   e) $\{f \in \mathbb{R}_4[X] \ : \ f(1) = 0 \text{ y } f(2) = f(3)\}$

5. Sea $S = \langle(1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

   a) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.

   b) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

   c) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

6. Sea V un K-espacio vectorial y sean $v,\, w \in V$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

   a) $\langle v,\, w\rangle = \langle v,\, w + 5v\rangle$.

   b) $\langle v,\, w\rangle = \langle v,\, aw + bv\rangle$, $\forall\, a, b \in K$.

   c) $\langle v,\, w\rangle = \langle v,\, aw + bv\rangle$, $\forall\, a \in K - \{0\}$, $b \in K$.

   d) $\langle v_1,\, v_2,\, w\rangle = \langle v_3,\, v_4,\, w\rangle \Rightarrow \langle v_1,\, v_2\rangle = \langle v_3,\, v_4\rangle$.

   e) $\langle v_1,\, v_2,\, w\rangle = \langle v_1,\, v_2\rangle \ \Leftrightarrow \ w \in \langle v_1, v_2\rangle$.

7. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K.

   a) $\{(1 - i, i),\, (2, -1 + i)\}$ en $\mathbb{C}^2$ para $K = \mathbb{R}$ y para $K = \mathbb{C}$.

   b) $\{(1 - X)^3,\, (1 - X)^2,\, 1 - X,\, 1\}$ en $K[X]$

   c) $\{\operatorname{sen} x\, ,\, \cos x\, ,\, x \cos x\}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ para $K = \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ son las funciones $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

   d) $\{e^x\, ,\, x\, ,\, e^{-x}\}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ para $K = \mathbb{R}$

   e) $u = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$, $v = (0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$, $w = (1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots)$ en $K^{\mathbb{N}}$, donde $K^{\mathbb{N}}$ son las sucesiones $\{(a_1, a_2, \ldots) : a_i \in K\}$.

8. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales cada uno de los siguientes subconjuntos es linealmente independiente.

   a) $\{(1,2,k),\ (1,1,1),\ (0,1,1-k)\} \subset \mathbb{R}^3$
   b) $\{(k,1,0),\ (3,-1,2),\ (k,2,-2)\} \subset \mathbb{R}^3$
   c) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

9. Hallar una base y la dimensión de los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

   a) $\langle (1,4,-2,1),\ (1,-3,-1,2),\ (3,-8,-2,7) \rangle$
   b) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \ :\ x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$
   c) $\{f \in \mathbb{R}_3[X] \ :\ f(2)=f(-1)\}$
   d) $\{f \in \mathbb{R}_3[X] \ :\ f(2)=f'(2)=0\}$
   e) $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \ :\ \mathrm{tr}(A)=0\}$
   f) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ :\ a_i=a_j,\ \forall\, i,j\,\}$

10. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del K-espacio vectorial V indicado.

   a) $\{(1,1,1,1),\ (0,2,1,1)\}$, $V = \mathbb{R}^4, K=\mathbb{R}$
   b) $\{X^3-2X+1,\ X^3+3X\}$, $V=\mathbb{R}_3[X], K=\mathbb{R}$
   c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V=\mathbb{C}^{2\times 2}, K=\mathbb{C}$

11. Extraer una base de los siguientes K-espacios vectoriales, de cada uno de los sistemas de generadores dados.

   a) $\langle (1,1,2),\ (1,3,5),\ (1,1,4),\ (5,1,1) \rangle \subset \mathbb{R}^3, K=\mathbb{R}$
   b) $\langle X^2+2X+1,\ X^2+3X+1,\ X+2 \rangle \subset \mathbb{R}[X], K=\mathbb{R}$
   c) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^{2\times 2}, K=\mathbb{C}$

12. Hallar la dimensión de los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, para cada $k \in \mathbb{R}$

   a) $\langle (1,k,1),\ (-1,k,1),\ (0,1,k) \rangle$
   b) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
   c) $\{x \in \mathbb{R}^3 :\ Ax=0\}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

13. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$\langle (-2,1,6),(3,0,-8) \rangle = \langle (1,k,2k),(-1,-1,k^2-2),(1,1,k) \rangle$$

14. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S\cap T$ y $S+T$ de V. Determinar si la suma es directa.

   a) $V=\mathbb{R}^3$, $S=\{(x,y,z) :\ 3x-2y+z=0\}$ y $T=\{(x,y,z) :\ x+z=0\}$
   b) $V=\mathbb{R}^3$, $S=\{(x,y,z) :\ 3x-2y+z=0,\ x-y=0\}$ y $T=\langle (1,1,0),(5,7,3) \rangle$
   c) $V=\mathbb{R}^3$, $S=\langle (1,1,3),(1,3,5),(6,12,24) \rangle$ y $T=\langle (1,1,0),(3,2,1) \rangle$

d) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(1) = 0\}$ y $T = \langle 1, X, X^2, X^3 + 2X^2 - X, X^5 \rangle$

e) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[X] : f'(0) = f''(0) = 0\}$

15. Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$.

16. En cada caso siguiente, probar que S y T son subespacios de V que satisfacen $S \oplus T = V$.

    a) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ es constante}\}$

    b) $V = K^{n \times n}$, $S = \{A \in K^{n \times n} : A = A^t\}$ y $T = \{A \in K^{n \times n} : A = -A^t\}$
    (los elementos de S se llaman *matrices simétricas* y los de T, *matrices antisimétricas*).

17. Para cada subespacio $S \subseteq V$ dado, hallar un subespacio $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$.

    a) $S = \langle (1, 2, -1, 3), (2, 3, -2, 1), (0, 1, 0, 7) \rangle$, $V = \mathbb{R}^4$

    b) $S = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$

    c) $S = \langle 3, 1 + X^2 \rangle$, $V = \mathbb{R}_4[X]$

18. Mostrar que si S, T son subespacios de $\mathbb{R}^3$ tales que $\dim S = \dim T = 2$, entonces existe $v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$.

19. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (i.e. un subespacio de dimensión $n - 1$).

    a) Probar que $\forall\, v \notin T$, $T \oplus \langle v \rangle = V$.

    b) Si S es un subespacio de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$. Calcular $\dim(S \cap T)$.

    c) Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir $\dim(S \cap T)$.

20. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base $\mathcal{B}$ en los siguientes casos:

    a) $V = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$, $v = (1, 2, -1)$ y $v = (x_1, x_2, x_3)$

    b) $V = \mathbb{R}_3[X]$; $\mathcal{B} = \{3, X + 1, X^2 + 5, X^3 + X^2\}$, $v = 2X^2 - X^3$

    c) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$; $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$, $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$