
ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO / CÁLCULO NUMÉRICO

Curso de Verano 2019

Práctica N° 7: Aproximación por cuadrados mínimos.

Ejercicio 1 Escribir un programa que reciba como datos dos vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} y un número n y devuelva un vector con los coeficientes del polinomio de grado n que mejor ajusta la tabla dada por \mathbf{x} e \mathbf{y} en el sentido de cuadrados mínimos.

Para el cálculo, utilice la descomposición QR de una matriz apropiada.

Ejercicio 2 La siguiente tabla contiene los porcentajes de asistencia a los laboratorios de Cálculo Numérico y la nota obtenida en el final de la materia, por un grupo de alumnos:

x	60.3	37.4	65	74.8	39	21.1	36.1	38.6	53.1	65.7	16.8	32.4	78.8	15.3
y	8	6	8	9	6	5	6	6	7	8	5	6	9	5
	x	84.8	71.6	54.7	67.1	35	49.7	80.5	66.8	60.4	30.7	50.2		
	y	10	9	7	8	6	7	10	8	8	6	7		

Realizar un ajuste lineal y un ajuste cuadrático de los datos. A partir de cada ajuste, ¿qué porcentaje de asistencia a los laboratorios sería recomendable alcanzar si se quiere obtener al menos un 8 en el final?

Ejercicio 3 Hallar la constante o polinomio de grado 0 que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos a una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en n puntos x_1, \dots, x_n en $[a, b]$.

Ejercicio 4 Considerar la función $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Para $n = 5, 10, 15$; graficar simultáneamente f junto con

- los polinomios que aproximan a f en el sentido de cuadrados mínimos en $n + 1$ puntos equiespaciados y tienen grado $\frac{2}{5}n$ y $\frac{4}{5}n$,
- el polinomio que resulta de interpolar a f en los puntos anteriores.

Ejercicio 5 Considerar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- Calcular una descomposición en valores singulares de A .
- Dibujar el círculo unitario en \mathbb{R}^2 y la elipse $\{Ax : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$, señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.
- Calcular $\|A\|_2$ y $Cond_2(A)$.

d) Calcular A^{-1} usando la descomposición hallada.

Ejercicio 6 Dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, de rango r , probar que A puede escribirse como una suma de r matrices de rango 1.

Ejercicio 7 Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, cuya descomposición en valores singulares reducida es $A = \hat{U}\hat{\Sigma}V^t$. Se define la pseudo-inversa de A como $A^\dagger = V\hat{\Sigma}^{-1}\hat{U}^t$.

Considerar el problema de cuadrados mínimos:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2. \quad (1)$$

- a) Probar que si $\text{rg}(A)$ es n , entonces (1) tiene solución única x^* y que $x^* = A^\dagger b$. (**Sug.:** Recordar que $\text{Nú}(A^t) = \text{Im}(A)^\perp$)
- b) Si $\text{rg}(A) = r < n$, entonces la solución de (1) no es única. En efecto: si x^* es solución y $\tilde{x} \in \text{Nú}(A)$, entonces $x^* + \tilde{x}$ también es solución. Probar que en tal caso, $x^* = A^\dagger b$ es la única solución de (1) en $\text{Nú}(A)^\perp$.

Ejercicio 8 Escribir un programa que reciba como datos dos vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} , y un conjunto de funciones \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \{f_1, \dots, f_n\}$$

y calcule la función $f \in \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ que mejor aproxima a la tabla dada por \mathbf{x} e \mathbf{y} en el sentido de cuadrados mínimos.

Nota: Investigar la estructura de datos `cell` como una forma de dar el conjunto \mathbf{S} .

Ejercicio 9 Sea S el subespacio de funciones continuas definidas de \mathbb{R} en \mathbb{R} generado por las funciones del conjunto $B = \{1, x, 2^x, 3^x\}$. Para $i = 0, 1, 2, 3$, sea $x_i = i$, y sea T un conjunto de datos del tipo $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$.

- a) Demostrar que B es una base de S y que para todo conjunto de datos T existe una única función $p \in S$ tal que p interpola a T .
- b) Demostrar que $\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^3 p(x_i)q(x_i)$ es un producto interno en S .
- c) Aproximar la siguiente tabla de datos en el sentido de cuadrados mínimos

x	0	1	2	3
y	0.3	-0.2	7.3	23.3

con funciones del tipo: (a) $y = a2^x + b3^x$, (b) $y = a2^x + b3^x + c$.

d) Graficar los resultados obtenidos junto con los valores de la tabla de datos.

Ejercicio 10 Escribir un programa en Octave que reciba como input una matriz A y un entero positivo r y:

- Calcule la descomposición en valores singulares $A = U\Sigma V'$, utilizando el comando `svd`.
- Corrija la matriz Σ poniendo $\sigma_i = 0, \forall i > r$.

- Devuelva $B = U\tilde{\Sigma}V'$, siendo $\tilde{\Sigma}$ la matriz que resulta de corregir Σ según el ítem anterior.

Probar que la matriz B es la matriz de de rango r cuya distancia a A (en norma 2) es mínima.. Aplicar este programa a distintas matrices, con distintos valores de r .

Ejercicio 11 El programa del ejercicio anterior puede utilizarse para comprimir imágenes. En efecto, dada una imagen blanco y negro el comando `imread` de Octave convierte la imagen en una matriz en la que cada casillero representa un píxel y su valor corresponde al color del píxel en escala de grises. El comando `imshow` aplicado a esta matriz, muestra la imagen, mientras que el comando `imwrite` permite guardar la matriz como un archivo de imagen.

Implementar un algoritmo que reciba como input un archivo de imagen y un entero positivo r , realice la compresión como en el ejercicio anterior y guarde el resultado en otro archivo. Experimentar con el valor de r , observando cuán chico puede ser r en relación con el tamaño de la matriz si se desea conservar calidad en la imagen.

La misma experiencia puede repetirse con imágenes en color. En este caso, debe tenerse en cuenta que el comando `imread` devuelve un arreglo A de tamaño $m \times n \times 3$: la imagen es de $m \times n$ píxeles y $A(:, :, 1)$, $A(:, :, 2)$, $A(:, :, 3)$ son las matrices correspondientes a su descomposición *RGB* (red-green-blue).

(Considerar los comandos `double` y `uint8`.)

Ejercicio 12 Considerar $\text{erf} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

- Graficar la función con el comando `erf` de Octave en el intervalo $[-15, 15]$. Observar que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{erf}(x) = \pm 1$.
- Aproximar la función `erf` en el sentido de cuadrados mínimos con polinomios de grado 1, 3 y 5, considerando 20 puntos equiespaciados en el intervalo $[-10, 10]$. Graficar `erf` junto con estos polinomios en el intervalo $[-15, 15]$. Observar que la aproximación es mala fuera del intervalo $[-10, 10]$.
- Se quiere aproximar nuevamente la función `erf` en el sentido de cuadrados mínimos con una combinación lineal de funciones que compartan con `erf` la propiedad de ser acotada e impar. Para ello, ajustar la función `erf` con una función del tipo

$$c_1 x e^{-x^2} + c_2 \arctan(x) + c_3 \frac{x}{x^2 + 1},$$

considerando 20 puntos equiespaciados en el intervalo $[-10, 10]$. Graficar `erf` junto a esta aproximación en el intervalo $[-15, 15]$ y comparar con el ítem (b).

Ejercicio 13 Aproximar los datos de la tabla siguiente con un modelo de la forma $f(x) \sim a e^{bx}$ en el sentido de cuadrados mínimos para la función $\ln(f(x))$.

x	-1	0	1	2
y	8.1	3	1.1	0.5

Ejercicio 14 Aproximar los datos de la tabla siguiente con un modelo de la forma $f(x) \sim -e^{ax^2+bx+c}$ en el sentido de cuadrados mínimos para la función $\ln(-f(x))$.

x	-1	0	1	2
y	- 1.1	- 0.4	- 0.9	- 2.7

Ejercicio 15 Considerar la función signo dada por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Aproximar la función sgn en el sentido de cuadrados mínimos con funciones de la forma $a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + a_3 \cos(3x) + b_3 \sin(3x)$, considerando puntos equiespaciados en el intervalo $[-\pi, \pi]$, con paso 0.001. Graficar el resultado obtenido.

Ejercicio 16 Considerar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f'(x)g'(x) dx$$

- Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en S_m , el espacio generado por $\{x, x^2, x^3, \dots, x^m\}$.
- Hallar una base ortonormal para S_3 .
- Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos sobre S_3 para $f(x) = x^4$.

Ejercicio 17 Sea

$$\langle f, g \rangle = f(1)g(1) - f(-1)g(-1) + \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)dx.$$

- Decidir si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en $C^1([-1, 1])$.
- Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno para el espacio $V = \{f \in C^1([-1, 1]) : f \text{ es impar}\}$.
- Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos del polinomio $p(x) = x^5$ sobre el subespacio S generado por $\{x, x^3\}$.

Ejercicio 18 a) Demostrar que

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f''(x)g''(x)dx + f(-1)g(-1) + f(1)g(1)$$

es un producto interno en el espacio $\mathcal{C}^2([-1, 1])$.

- Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[X]$ para el producto interno definido en el ítem anterior.
- Probar que si f es una función par en $\mathcal{C}^2([-1, 1])$, entonces su proyección sobre $\mathbb{R}_2[X]$ es par, y que si f es una función impar, entonces su proyección es impar.