

---

# ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO / CÁLCULO NUMÉRICO

Curso de Verano 2019

---

## Práctica N° 3: Ecuaciones Diferenciales: problemas de valores de contorno.

**Ejercicio 1** Hallar el error local de las siguientes discretizaciones de la derivada primera indicando en cada caso las hipótesis de suavidad que requiere de la función  $u$ :

- a)  $u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$  (diferencia *forward*)
- b)  $u'(x) \sim \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$  (diferencia *backward*)
- c)  $u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$  (diferencias centradas)
- d)  $u'(x) \sim -\frac{1}{h}(\frac{3}{2}u(x) - 2u(x+h) + \frac{1}{2}u(x+2h))$

**Ejercicio 2** Hallar el error local para la discretización habitual de la derivada segunda, y explicitar sus requerimientos de suavidad:

$$f''(x) \sim \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

**Ejercicio 3** Se tiene una masa sujeta a un resorte. Suponiendo que no existe rozamiento, la posición  $y(t)$  de la masa a tiempo  $t$  está regida por la ecuación:

$$m\ddot{y} = -ky,$$

donde  $m$  es la masa y  $k$  la constante del resorte.

Supongamos que la masa se encuentra en movimiento y que se registra que su posición a tiempo 0 es  $y(0) = 0$ , mientras que a cierto tiempo  $t_f$ , es  $y(t_f) = y_f$ .

- a) Discretizar el intervalo  $[0, t_f]$  con paso  $h$ . Utilizando la discretización usual para la derivada segunda y teniendo en cuenta las condiciones de contorno, discretizar el problema, formulándolo como un sistema lineal.
- b) Hacer un programa que reciba como input la masa  $m$ , la constante  $k$  y el paso  $h$ , construya la matriz del sistema, lo resuelva, y grafique la solución.
- c) Resolver para  $t_f = 10$ , con los siguientes datos:
  - $y_f = 1, m = \frac{1}{4}, k = \frac{1}{2}$ .
  - $y_f = 1, m = 0.025, k = \frac{1}{2}$ .
  - $y_f = 1, m = \frac{1}{4}, k = 0.05$ .
  - $y_f = 1, m = 0.025, k = 0.05$ .

Observar el efecto que producen las modificaciones en los distintos parámetros.

**Ejercicio 4** Si al problema anterior se le agrega rozamiento y un forzante se obtiene una ecuación de la forma:

$$m\ddot{y} = -ky - b\dot{y} + f,$$

donde  $b$  es el coeficiente de rozamiento y  $f = f(t)$  el forzante.

- a) Escribir el sistema discretizado que corresponde a utilizar la discretización usual de la derivada segunda y diferencias centradas para la derivada primera.
- b) Repetir usando diferencias forward para la derivada primera.
- c) Modificar el programa del ejercicio anterior para incorporar los nuevos términos de la ecuación utilizando diferencias centradas o forward para la derivada primera.
- d) Para  $f = 0$  proponer soluciones de la forma  $y(t) = Ae^{\lambda t}$ . Hallar valores de  $\lambda$  en función de los parámetros  $m$ ,  $k$  y  $b$ . Estudiar el comportamiento de la solución de acuerdo a la naturaleza de los valores de  $\lambda$  hallados.
- e) Resolver tomando  $y_0 = 1$ ,  $t_f = 10$ ,  $y_f = 0$ , con distintas combinaciones de los parámetros:
  - $m = 0.25$ ,  $m = 0.025$ .
  - $k = 0.5$ ,  $k = 0.05$ .
  - $b = 5 \times 10^{-3}$ ,  $b = 0.05$ ,  $b = 0.1$ .

Analizar si los resultados obtenidos son cualitativamente consistentes con lo esperado.

**Ejercicio 5** Calcular el error de truncado de las discretizaciones usadas en el ejercicio anterior, tanto para diferencias centradas como para forward. ¿Cuál parece preferible?

**Ejercicio 6** Considerar el problema del calor estacionario en el intervalo  $[0, 1]$ :

$$\begin{aligned} -\alpha u''(x) &= f(x), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

donde  $u$  representa la distribución de temperatura generada por una fuente  $f$  y  $\alpha > 0$  es el coeficiente de difusividad térmica.

- a) Formular el problema de forma matricial.
- b) Estudiar el error de truncado.
- c) Resolver y graficar la solución para distintos valores de  $\alpha$ .

**Ejercicio 7** Considerar el problema de evolución para la ecuación del calor, dado por la ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \alpha u_{xx}(x, t) & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x) & x \in [0, 1] \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 & t > 0, \end{aligned}$$

donde tomamos  $\alpha = 1$ .

- Discretizar el problema usando un esquema explícito con paso  $h$  en  $x$  y paso  $\Delta t$  en  $t$ .
- Calcular el error de truncado del método. ¿Existe algún valor de  $r = \frac{\Delta t}{h^2}$  tal que el error de truncado sea mejor?
- Hallar condiciones sobre  $r$  que garanticen la estabilidad del método en norma infinito.
- Probar que el error de discretización  $e_j^n = U(x_j, t_n) - u_j^n$  es solución de la ecuación en diferencias:
 
$$e_j^{n+1} = r e_{j-1}^n + (1 - 2r) e_j^n + r e_{j+1}^n + \Delta t T(x_j, t_n),$$
 donde  $T(x_j, t_n)$  es el error de truncado local en  $(x_j, t_n)$ .
- Probar que si se satisfacen las condiciones de estabilidad el método resulta convergente.

**Ejercicio 8** Para el problema del ejercicio anterior:

- Implementar un programa que reciba como input los pasos  $h$  y  $\Delta t$ , el coeficiente  $\alpha$ , el dato inicial  $g$  y un tiempo final  $t_f$  y resuelva el problema.
- Graficar la solución  $u$  con dominio en el plano  $[0, 1] \times [0, t_f]$ . ¿Qué se observa cuando se resuelve utilizando un valor de  $r$  que no satisface la condición de estabilidad?
- Graficar la solución en el intervalo  $[0, 1]$ , para cada instante de tiempo. Usando los comandos `drawnow` y `pause(\cdot)` puede obtenerse una *película* mostrando la evolución de la solución.

**Ejercicio 9** Modificar el programa del Ejercicio 8 para que resuelva la ecuación

$$u_t(x, t) = \alpha u_{xx}(x, t) + f(x, t),$$

donde  $f$  es una fuente.

Resolver tomando  $g(x) \equiv 0$ , para alguna  $f$ . Por ejemplo, pueden tomarse:

- $f(x, t) = x(1 - x)$
- $f(x, t) = \chi_{[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]}(x)$
- $f(x, t) = \chi_{[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]}(x) \sin(t)$
- $f(x, t) = \chi_{[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]}(x) \chi_{[2i, 2i+1]}(t) + \chi_{[\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]}(x) \chi_{[2i+1, 2i+2]}(t)$ , tomando  $i = 0, \dots, I - 1$ ,  $t_f = 2I$ .

Para las  $f$  independientes de  $t$ , comparar la solución a tiempo  $t_f$  con la obtenida al resolver el problema estacionario del Ejercicio 6.

**Ejercicio 10** Considerar la ecuación  $u_t = \alpha u_{xx}$  con condiciones de Dirichlet homogéneas y con  $\alpha > 0$ . Para el método implícito de primer orden:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r\alpha(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}).$$

- Estudiar la estabilidad en norma infinito.
- Probar que el error de truncado es  $O(\Delta t) + O(h^2)$ .