

## Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3.

Curso de verano 2019

Práctica 1 - Curvas, integral de longitud de arco e integrales curvilíneas.

### Curvas

**Ejercicio 1.** a). Probar que

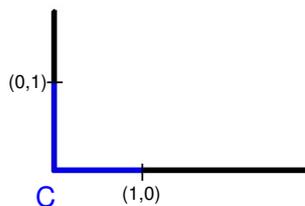
$$\begin{cases} x_1(t) = r \cos(2\pi t), \\ y_1(t) = r \operatorname{sen}(2\pi t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_2(t) = r \cos(4\pi t), \\ y_2(t) = r \operatorname{sen}(4\pi t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

son dos parametrizaciones  $C^1$  de la circunferencia de centro  $(0,0)$  y radio  $r$ .

b). Probar que la circunferencia es una curva cerrada, simple, suave.

c). Probar que  $\sigma_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$ ,  $t \in [0, 1]$  no es una parametrización regular.

**Ejercicio 2.** Considerar la curva  $\mathcal{C}$  formada por los segmentos que unen el  $(0, 1)$  con el  $(0, 0)$  y el  $(0, 0)$  con el  $(1, 0)$ .



Probar que

$$\sigma(t) := \begin{cases} (0, (1-t)^2), & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ ((t-1)^2, 0), & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

es una parametrización  $C^1$  de la curva  $\mathcal{C}$ .

Observar que  $\mathcal{C}$  no tiene recta tangente en el  $(0, 0)$ . ¿Por qué no hay contradicción?

**Ejercicio 3.** Sea  $\sigma(t) = (t^3, t^3)$  con  $-1 \leq t \leq 1$ .

Probar que  $\sigma$  es una parametrización  $C^1$  del segmento  $y = x$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  que es una curva suave.

Observar que  $\sigma'(0) = (0, 0)$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $\mathcal{C}$  el arco de parábola  $y = x^2$  con  $0 \leq x \leq 1$ .

a). Probar que  $\mathcal{C}$  es una curva abierta, simple, suave

b). Probar que  $\bar{\sigma}(s) := (\bar{x}(s), \bar{y}(s))$  dada por

$$\begin{cases} \bar{x}(s) = e^s - 1 \\ \bar{y}(s) = (e^s - 1)^2 \end{cases} \quad 0 \leq s \leq \ln 2$$

es una parametrización regular de  $\mathcal{C}$ .

- c). Observar que  $\sigma(t) := (t, t^2)$  con  $t \in [0, 1]$  es otra parametrización regular.  
 d). Hallar una función  $g : [0, 1] \rightarrow [0, \ln 2]$  tal que  $\tilde{\sigma}(g(t)) = \sigma(t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ .  
 Observar que  $g$  es biyectiva y  $C^1$ .

**Definición.** Sea  $\sigma(t)$  la posición en el instante  $t$  de una partícula que se mueve en el espacio en forma continua. Esta partícula recorre una curva  $\mathcal{C}$  y  $\sigma$  es una parametrización de  $\mathcal{C}$ .

En este contexto  $\sigma'(t)$  es un vector cuya magnitud da la rapidez con la que se mueve la partícula al pasar por el punto  $\sigma(t)$ . Además, este vector da la dirección y sentido del movimiento. Por eso se lo denomina “vector velocidad”.

Por un razonamiento análogo, al vector  $\sigma''(t)$  se lo denomina “vector aceleración”.

Conservaremos esta nomenclatura para estos vectores aún cuando la curva  $\mathcal{C}$  y/o la parametrización  $\sigma$  no correspondan a la trayectoria de una partícula.

**Ejercicio 5.** Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente para cada una de las curvas cuyas parametrizaciones se dan a continuación, en el valor especificado de  $t$ :

- a).  $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3)$ ,  $t = 0$ .  
 b).  $\sigma(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t)$ ,  $t = 0$ .  
 c).  $\sigma(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{3}{2}})$ ,  $t = 1$ .  
 d).  $\sigma(t) = (0, 0, t)$ ,  $t = 1$ .

**Ejercicio 6.** ¿Qué fuerza actúa sobre una partícula de masa  $m$  en el instante  $t = 0$  si sigue la trayectoria dada por la función  $\sigma$  del Ejercicio 7.(1)?

**Ejercicio 7.** Suponer que una partícula sigue la trayectoria  $\sigma(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$  hasta que sale por una tangente en  $t = 1$ . Hallar la ubicación de la partícula en  $t = 2$ . Suponer que ninguna fuerza actúa sobre ella después del tiempo  $t = 1$ .

## Integral de longitud de arco

**Ejercicio 8.** Considerar una partícula que se mueve siguiendo la trayectoria  $\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ . Hallar la velocidad, rapidez, y la longitud del arco descrito por la partícula entre los puntos  $\sigma(0)$  y  $\sigma(2\pi)$ . Observar que  $\sigma$  describe la función de posición de un punto en un círculo de radio 1, que va rodando. La curva que describe se conoce como cicloide.

**Ejercicio 9.** En los siguientes casos, calcular la longitud de la curva, donde  $\sigma$  es una parametrización de la misma sobre el intervalo  $[a, b]$ , siendo:

- a).  $\sigma(t) = (t, t^2)$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ .  
 b).  $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t + 1, t)$ ,  $a = 10$ ,  $b = 20$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $\mathcal{C}$  una curva simple, suave y  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de la misma. Para cada  $t \in [a, b]$  sea  $g(t)$  la longitud del arco de curva entre los puntos  $\sigma(a)$  y  $\sigma(t)$ . Sabemos que

$$g(t) = \int_a^t \|\sigma'(\tau)\| d\tau.$$

La función  $g(t)$  resulta ser continuamente diferenciable con derivada no nula para todo  $t$ . (En particular, se tiene que  $\|\sigma'(t)\| = g'(t)$  es la variación instantánea de la longitud de arco en el punto  $\sigma(t)$ . Esto justifica que, cuando  $\sigma(t)$  describe la posición de una partícula que se mueve sobre la curva  $\mathcal{C}$ , la magnitud  $\|\sigma'(t)\|$  es la rapidez con que se mueve la partícula).

Por ser  $g'(t) \neq 0$  para todo  $t$ , la función  $g$  admite una inversa continuamente diferenciable.

Sea  $\tilde{\sigma}(s) = \sigma(g^{-1}(s))$ . Probar que  $\tilde{\sigma} : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $\ell$  la longitud de  $\mathcal{C}$ , es una parametrización regular de  $\mathcal{C}$  tal que la longitud del arco que va de  $\tilde{\sigma}(0)$  a  $\tilde{\sigma}(s)$  es  $s$ .

Esto justifica la notación  $ds$  que muchas veces se da al diferencial de longitud de arco.

**Ejercicio 11.** Evaluar las integrales de longitud de arco  $\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds$ , donde  $\sigma$  es una parametrización de  $\mathcal{C}$ , en los casos siguientes:

- $f(x, y, z) = x + y + z$ ,  $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .
- $f(x, y, z) = \cos z$ ,  $\sigma$  como en la parte 1.
- $f(x, y, z) = x \cos z$ ,  $\sigma(t) = (t, t^2, 0)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

**Ejercicio 12.** a). Mostrar que la integral de longitud de arco de  $f(x, y)$  a lo largo de una curva dada en coordenadas polares por  $r = r(\theta)$ ,  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

- b). Calcular la longitud de la curva  $r = 1 + \cos \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

**Ejercicio 13.** Suponer que la semicircunferencia parametrizado por:

$$\sigma(\theta) = (0, a \sin \theta, a \cos \theta), \quad \theta \in [0, \pi],$$

con  $a > 0$ , está hecha de alambre con densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.

- ¿Cuál es la masa total del alambre?
- ¿Dónde está el centro de masa de esta configuración de alambre?
- Si la temperatura ambiente es igual a  $x + y - z$  en el punto  $(x, y, z)$ , calcular la temperatura promedio sobre el alambre.

**Ejercicio 14.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continuamente diferenciable a trozos, el gráfico de  $f$  en  $[a, b]$  es una curva que se puede parametrizar como  $\sigma(t) = (t, f(t))$  para  $t \in [a, b]$ .

- a). Mostrar que la longitud del gráfico de  $f$  en  $[a, b]$  es

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

- b). Hallar la longitud del gráfico de  $y = \log x$  de  $x = 1$  a  $x = 2$ .

## Integrales curvilíneas

**Ejercicio 15.** Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ . Evaluar la integral curvilínea de  $\mathbf{F}$  a lo largo de las curvas orientadas  $\mathcal{C}$  dadas por las siguientes parametrizaciones:

- $\sigma(t) = (t, t, t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .
- $\sigma(t) = (\sin t, 0, \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Ejercicio 16.** Para las curvas orientadas  $\mathcal{C}$  parametrizadas por las correspondientes funciones  $\sigma$ , evaluar las integrales siguientes:

- $\int_{\mathcal{C}} x dy - y dx$ ,  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
- $\int_{\mathcal{C}} x dx + y dy$ ,  $\sigma(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$ ,  $0 \leq t \leq 2$ .

**Ejercicio 17.** Considerar la fuerza  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ . Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola  $y = x^2$ ,  $z = 0$ , de  $x = -1$  a  $x = 2$ .

**Ejercicio 18.** Sea  $\mathcal{C}$  una curva orientada suave parametrizada por  $\sigma$ .

- a). Suponer que  $\mathbf{F}$  es perpendicular a  $\sigma'(t)$  en  $\sigma(t)$  para todo  $t$ . Mostrar que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

b). Si  $\mathbf{F}$  es paralelo a  $\sigma'(t)$  en  $\sigma(t)$  para todo  $t$ , mostrar que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \|\mathbf{F}\| ds.$$

(Aquí, por paralelo a  $\sigma'(t)$  se entiende que  $\mathbf{F}(\sigma(t)) = \lambda(t)\sigma'(t)$ , donde  $\lambda(t) > 0$ .)

**Ejercicio 19.** ¿Cuál es el valor de la integral curvilínea de un campo gradiente sobre una curva cerrada  $C$ ?

**Ejercicio 20.** Suponer que  $\nabla f(x, y, z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$ . Si  $f(0, 0, 0) = 5$ , hallar  $f(1, 1, 2)$ .

**Ejercicio 21.** Considerar el campo de fuerza gravitacional (con  $G = m = M = 1$ ) definido (para  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ ) por:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z).$$

Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de  $(x_1, y_1, z_1)$  a  $(x_2, y_2, z_2)$ , a lo largo de cualquier trayectoria, depende solamente de los radios  $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$  y  $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ .

**Ejercicio 22.** Sean  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^1$ ,  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo  $C^1$  y  $\mathbf{F} = \nabla f + \mathbf{G}$ . Sea  $C$  una curva cerrada, simple, suave, orientada. Verificar que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}.$$

**Ejercicio 23.** Sea  $C$  una curva suave,  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de  $C$ . Sea  $g : [\bar{a}, \bar{b}] \rightarrow [a, b]$  una biyección  $C^1$  con  $g'(\tau) \neq 0$  para todo  $\tau \in [a, b]$ . Sea  $\bar{\sigma} : [\bar{a}, \bar{b}] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\bar{\sigma}(s) = \sigma(g(s))$ . Llamamos a  $\bar{\sigma}$  una **reparametrización** de  $\sigma$ .

- Probar que  $\bar{\sigma}$  es una parametrización regular de  $C$ .
- Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Ver que el cálculo de  $\int_C f ds$  da el mismo resultado cuando la integral se evalúa utilizando la parametrización  $\sigma$  o la parametrización  $\bar{\sigma}$ .
- Sea  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  continua. Suponer que orientamos a  $C$  con la orientación dada por  $\sigma$ . Ver que el cálculo de  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  utilizando la parametrización  $\bar{\sigma}$  da el mismo resultado que cuando se utiliza  $\sigma$ , si  $\bar{\sigma}$  preserva la orientación de  $C$ . Ver que si no es así, los resultados difieren sólo en el signo.