Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3.

Curso de verano 2019

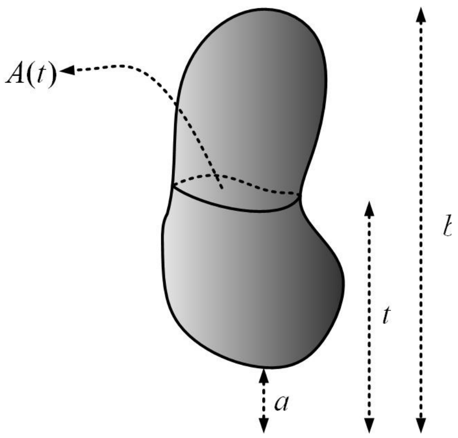
Práctica 0 - Repaso de integración y cambio de variables.

1. Principio de Cavalieri.

Ejercicio 1. Considerar un cuerpo que ocupa una región Ω en el espacio comprendida entre los planos $z = a$ y $z = \ell$. Deduzca que el volumen del cuerpo se puede calcular como

$$V = \int_a^\ell A(t)\, dt,$$

donde $A(t)$ es el área de la sección del cuerpo obtenido al intersecarlo con el plano $z = t$.



Ejercicio 2. Calcular el volumen de una región cilindríca. Verificar que la fórmula resultante coincide con la fórmula empírica *superficie de la base por altura.*

Ejercicio 3. Calcular el volumen de la región encerrada por el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2$.

2. Fubini.

Ejercicio 4. Sea R el rectángulo $R = [-1; 1] \times [0; 1]$. Evaluar las siguientes integrales dobles:

(*a*) $\iint_R x^2 y\, dA$, (*b*) $\iint_R x \cos(xy)\, dA$.

Ejercicio 5. Sea R el rectángulo arbitrario $[a; b] \times [c; d]$. Expresar mediante integrales simples la integral doble $\iint_R F(x, y)\, dA$ cuando $F(x, y)$ está dada por

(*a*) $F(x, y) = f(x)g(y)$.
(*b*) $F(x, y) = f(x) + g(y)$.

3. Descripción de Regiones.

Ejercicio 6. Sea T el triángulo de vértices $(0;0)$, $(2;3)$ y $(3;5)$. Describirlo como una región de tipo 1. Describirlo como una región de tipo 2. Hallar el área.

Ejercicio 7. Para cada una de las siguientes descripciones, graficar la región correspondiente y calcular el área respectiva.

(a) $-1 \leq x \leq 1+y;\ -1 \leq y \leq 1$,

(b) $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2};\ 0 \leq x \leq 1$,

Ejercicio 8. Sea $\mathcal{P}$ la pirámide cuyos vértices son $(0;0;0), (1;0;0), (0;1;0)$ y $(0;0;1)$. Describirla analíticamente. Hallar el volumen.

4. Aplicaciones de la integral.

Ejercicio 9. *Valor medio:* hallar el valor medio de la función $f(x,y) = x^2y$ en la región triangular de vértices $(1;1)$; $(2;0)$ y $(0;1)$.

Ejercicio 10. *Masa:* hallar la masa de la región esférica $x^2+y^2+(z-R)^2 = R^2$ sabiendo que la densidad de masa es proporcional a la componente z, digamos $\varrho = \lambda z$.

Ejercicio 11. *Campo gravitatorio :* consideremos un cuerpo material con densidad $\varrho(x,y,z)$ que ocupa la región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. A partir de las leyes de Newton, se sabe que el **vector** campo gravitatorio que aparece en el punto de coordenadas cartesianas (x,y,z) está dado por la siguiente integral, escrita en forma vectorial con $\mathbf{r} = (x,y,z)$, las coordenadas del punto donde queremos medir el campo, $\mathbf{r}' = (x',y',z')$, las coordenadas de un punto genérico del cuerpo y G una constante universal:

$$E(\mathbf{r}) = -G \iint_\Omega \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,\varrho(\mathbf{r}')\,dV(\mathbf{r}')\,.$$

Supongamos que el cuerpo ocupa una región acotada en el espacio, digamos $\Omega \subset B_R(0)$ y observemos que $\|E(\mathbf{r})\| \sim \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^2}$ cuando $\|\mathbf{r}\| \to \infty$.

A medida que $\|\mathbf{r}\| \to \infty$, la dirección del vector **r-r'** con **r'** $\in \Omega$ se parece más y más a la dirección de $\mathbf{r}$.

Esto hace suponer para puntos *lejanos*, el campo puede aproximarse por el campo gravitatorio que se obtiene al concentrar la masa total M en el origen: $E_0(\mathbf{r}) = -MG\dfrac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$.

Probar que esto es realmente así. Es decir, probar que

$$\lim_{\|\mathbf{r}\|\to\infty} \|\mathbf{r}\|^2 \big\|E(\mathbf{r}) - E_0(\mathbf{r})\big\| = 0.$$

Nota: hemos usado la notación $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ para el producto escalar de los vectores. La idea del último ejercicio es aprovechar para hablar de integrar vectores y de la desigualdad $\|\int \mathbf{f}\| \leq \int \|\mathbf{f}\|$

5. Cambio de Variables.

Ejercicio 12. Sean $T(u,v) = T(x(u,v), y(u,v)) = (a_{11}u + a_{12}v, a_{21}u + a_{22}v)$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Sea D^* el rectángulo $[0,3] \times [1,3]$.

(a) Hallar $D = T(D^*)$. ¿Es biyectiva T? Observar que D es un paralelogramo y hallar su área.

(b) Describir el área de D en términos de una integral sobre D^*. Indicar que función hay que integrar y que relación tiene con T.

Ejercicio 13. Sea D el paralelogramo de vértices $(1,2)$, $(5,3)$, $(2,5)$, $(6,6)$. Calcular

(a) $\int_D xy\,dxdy$

(b) $\int_D (x-y)\,dxdy$

Sugerencia: plantear las integrales como integrales sobre el cuadrado $D^* = [0,1] \times [0,1]$.

Ejercicio 14. Sean $D^* = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1;\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ y P la transformación de coordenadas polares a cartesianas, es decir, $P(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

(a) Mostrar que $P(D^*) = D$. ¿Es biyectiva P?

(b) ¿En qué transforma P el rectángulo $[r, r+\Delta r] \times [\theta, \theta+\Delta\theta]$?

(c) Calcular la matriz $DP(r,\theta)$. ¿En qué transforma la aplicación dada por esta matriz al rectángulo dado en b)? ¿Y en el caso $r=0$?

(d) Escribir la demostración de la fórmula de cambio de variables en este caso (haciendo los dibujos correspondientes).

Ejercicio 15. Sean $D_1 = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1,\ \ 0 \leq \theta \leq 4\pi\}$ y P la transformación del ejercicio anterior.

(a) Hallar $D = P(D_1)$.

(b) Calcular $\int_D (x^2+y^2)\, dxdy$ y $\int_{D_1} r^2 J\, drd\theta$ siendo J el jacobiano de la transformación polar.

¿Dan igual las dos integrales? ¿Por qué?

Ejercicio 16. Hallar el área acotada por la curva dada por la ecuación $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$. Esta curva se llama lemniscata.

Ejercicio 17. Calcular $\int_B z\, dx\, dy\, dz$ donde B es la región sobre el plano xy dentro del cilindro dado por $x^2+y^2 \leq 1$ y debajo del cono dado por $z = (x^2+y^2)^{1/2}$.

Ejercicio 18. Sea E el elipsoide dado por $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)+(z^2/c^2) \leq 1$.

(a) Hallar el volumen de E.

(b) Calcular $\int_E [(x^2/a^2)+(y^2/b^2)+(z^2/c^2)]\, dxdydz$.

Ejercicio 19. Hallar el centro de masa del cilindro $x^2+y^2 \leq 1$, $1 \leq z \leq 2$, si la densidad es $\rho = (x^2+y^2)z^2$.

Ejercicio 20. Si un sólido W tiene densidad uniforme ρ, el *momento de inercia* alrededor del eje x está definido por,

$$I_x = \int_W \rho\, (y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz$$

y análogamente se definen I_y e I_z. Sea ahora W el sólido con densidad constante acotado por arriba por el plano $z=a$ y por debajo por el cono descripto en coordenadas esféricas por $\phi = k$, donde k es una constante tal que $0 < k < \pi/2$. Dar una integral para su momento de inercia alrededor del eje z.