Ecuaciones Diferenciales A/B

Práctica 6: Ecuación de ondas

Ejercicio 1. Utilizar la transformada de Fourier para resolver el problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = h(x,t) & \text{en } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0 & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ejercicio 2. Utilizar la transformada de Fourier para hallar la solución de

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \\ \partial_t u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

donde $g \in \mathcal{S}$.

Sugerencia: Transformar Fourier en la variable x y para la ODE resultante busque soluciones de la forma $\beta e^{t\gamma}$ (β y γ números complejos).

Ejercicio 3. Verificar que el cambio de variables

$$\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct,$$

transforma la ecuación de ondas $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$ en

$$\partial_\xi \partial_\eta u = 0.$$

Usar este cambio de variables para hallar la fórmula de D'Alembert para la solución de la ecuación de ondas unidimensional.

Ejercicio 4. Encontrar una fórmula explícita para la solución de

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x > 0 \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x > 0. \end{cases}$$

Ejercicio 5. Sean $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Definamos u por la fórmula de Kirchhoff.

Probar que $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ y satisface el problema de valores iniciales para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^3 \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Ejercicio 6 (Equipartición de la energía)**.** Sea $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ una solución de la ecuación de ondas unidimensional

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Supongamos que g y h son suaves con soporte compacto.

La energía cinética $k(t)$ y la energía potencial $p(t)$ se definen como

$$k(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\partial_t u)^2\, dx, \qquad p(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u)^2\, dx.$$

Probar que

1. $k(t) + p(t)$ es constante en t.
2. $k(t) = p(t)$ para tiempos t suficientemente grandes.
   (Sugerencia: Usar que u viene dado por $u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$.)

Ejercicio 7. Sea u la solución de la ecuación de ondas

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^3 \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

dada por la fórmula de Kirchhoff, donde g, h son suaves y tienen soporte compacto. Mostrar que existe una constante C tal que

$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{t} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0.$$

Ejercicio 8. Se define una solución débil de la ecuación de ondas unidimensional a una función u tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)(\partial_t^2\phi(x,t) - \partial_x^2\phi(x,t))\, dxdt = 0$$

para toda $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$.

1. Mostrar que toda solución clásica de la ecuación de ondas unidimensional es una solución débil y que toda solución débil regular de la ecuación de ondas es solución clásica.
2. Mostrar que las funciones discontinuas

   $$u_1(x,t) = H(x-t), \quad u_2(x,t) = H(x+t)$$

   donde H es la función de Heaviside

   $$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

   son soluciones débiles de la ecuación de ondas unidimensional.

Ejercicio 9. Sea $f \in C_c(\mathbb{R})$. Probar que $u(x,t) \equiv f(x-t)$ es solución débil de la ecuación de ondas unidimensional en el sentido del ejercicio anterior.

Ejercicio 10. Encontrar una solución de

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = \lambda^2 u,$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, de la forma $u = f(x^2 - t^2) = f(s)$, donde $f(0) = 1$, en forma de serie de potencias en s.

Ejercicio 11. Hallar la solución de

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = f(t) & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x > 0 \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x > 0. \end{cases}$$

con $f, g, h \in C^2$ que satisfacen

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = h(0), \quad f''(0) = g''(0).$$

Verificar que la solución obtenida tiene derivadas de segundo orden continuas aún sobre la característica $x = t$.

Ejercicio 12. Probar que si u es una solución clásica radial de la ecuación de ondas en dimensión 3 (i.e. $u(x,t) = w(|x|,t),\ x \in \mathbb{R}^3$), se tiene que existen F y G tales que

$$u(x,t) = \frac{F(|x| - t) + G(|x| + t)}{|x|}.$$