Ecuaciones Diferenciales A/B

Práctica 5: Ecuaciones de primer orden

Ejercicio 1. Resolver
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \partial_i u = e^{-\sum_{i=1}^n x_i} & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{x_1=0} = x_2 \end{cases}$$

Ejercicio 2. Resolver
$$\begin{cases} x \cdot \nabla u = |x|^2 & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{x_1=1} = 3x_n. \end{cases}$$
Estudiar el dominio de definición de la solución.

Ejercicio 3. Mostrar, por consideraciones geométricas, que la solución general de
$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$
es $u(x, y) = f(xy)$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Encontrar la solución cuyo gráfico contiene a la recta de ecuación $y = x = u$.

¿Qué pasa con el problema de valores iniciales cuando estos se dan sobre la curva $y = 1/x$?

Ejercicio 4. Probar que no existe solución de la ecuación
$$u_x + u_y = u$$
que satisfaga las condiciones iniciales $u = 1$ en la recta $y = x$.

Ejercicio 5. Probar que la solución de la ecuación
$$u_x + u_y = u^2$$
cuyo gráfico contiene a la recta $x = -y = u$ no está definida sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$.

Ejercicio 6. Sea $u(x, t)$ la solución clásica del problema
$$\begin{cases} u_t + f(x, t)u_x = \psi(x, t) & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
Ver que sobre las trayectorias $(x(t), t)$, u se expresa como
$$u(x(t), t) = u_0(x(0)) + \int_0^t \psi(x(s), s)ds.$$

Ejercicio 7. Hallar la solución de la ecuación
$$(x^2 + y^2)u_x + 2xyu_y = (x + y)u$$
que satisface $u(0, y) = y$.

Ejercicio 8. Dado
$$Lu \equiv x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} - 3u,$$
resolver:

1. $\begin{cases} Lu = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \\ u(x,y,0) = xy & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} Lu = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \\ u(x,y,0) = f(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$
   imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad a f.

Ejercicio 9. Usar el principio de Duhamel para resolver el problema

$$\begin{cases} c_t + vc_x = f(x,t) & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ c(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Hallar una fórmula explícita cuando $f(x,y) = e^{-t} \sin x$.

Ejercicio 10. Enunciar y probar un teorema de existencia y unicidad para el problema

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = f(x,t) - \gamma u & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde $\gamma > 0$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ son constantes, imponiendo adecuadas condiciones de regularidad sobre f y g.

Ejercicio 11. Sea $v \in \mathbb{R}$. Demostrar que si $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ es solución de

$$\begin{cases} u_t + vu_x = 0 & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = h(t) & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x > 0, \end{cases}$$

entonces se obtiene la siguiente estimación de estabilidad

$$\int_0^R u^2(x,t)\,dx \leq \int_0^R g^2(x)\,dx + v \int_0^t h^2(s)\,ds.$$

Deducir de esta estimación la unicidad de soluciones para este problema.

Ejercicio 12. Considerar la ecuación

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x)$$

para una función $u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$.

Una curva $(t, x(t))$ en el plano se dice característica si

$$x'(t) = u(x(t),t).$$

1. Demostrar que u es constante a lo largo de cada curva característica.
2. Demostrar que las pendientes de las curvas características están dadas por $dt/dx = 1/u$ y usarlo para probar que las curvas características son rectas determinadas por los datos iniciales.
3. Suponer que $x_1 < x_2$ y $u_0(x_1) > u_0(x_2) > 0$. Mostrar que las dos características que pasan por los puntos $(x_1,0)$ y $(x_2,0)$ se intersecan en un punto $P = (\bar{x},\bar{t})$ con $\bar{t} > 0$. Mostrar que esto, junto con la parte 1 implica que la solución no puede ser continua en P.
4. Calcular $\bar{t}$.

Ejercicio 13. Repetir el ejercicio 12 para la ecuación

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{1}$$

donde $f'' > 0$ y $f'(u_0(x_2)) > 0$. Las características se definen ahora mediante

$$x'(t) = f'(u(x(t),t)).$$

Decimos que la ecuación (1) está en *forma de divergencia*.

Concluir que, en general, es imposible hallar una solución continua, independientemente de la suavidad de f.

Ejercicio 14. Sea $D = [-a, a] \times [0, T]$ y sea $\phi \in C^1(D)$ tal que

$$\phi(\pm a, t) = 0 \text{ para } 0 \leq t \leq T \text{ y } \phi(x, T) = 0 \text{ para } -a \leq x \leq a. \tag{2}$$

1. Probar que si u es solución de (1) entonces verifica

$$\iint_D [u\phi_t + f(u)\phi_x]\, dxdt + \int_{-a}^{a} u_0(x)\phi(x, 0)\, dx = 0. \tag{3}$$

   Una función $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ tal que $f(u) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ que verifique (3) para todo rectángulo D y toda $\phi \in C^1(D)$ que verifique (2) se denomina una solución débil de (1).
2. Mostrar que si u es una solución débil de (1) y es de clase C^1 entonces es una solución *clásica* de (1).

Ejercicio 15. Considerar la ecuación

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \quad \text{con dato inicial } u(x, 0) = \begin{cases} -1 & x \geq 0 \\ - & x < 0 \end{cases}.$$

Mostrar que para todo $\alpha \geq 1$, la función u_α es una solución débil de la ecuación (en el sentido del ejercicio anterior), donde u_α viene dada por

$$u_\alpha(x, t) = \begin{cases} 1 & x \leq \frac{1-\alpha}{2}t \\ -\alpha & \frac{1-\alpha}{2}t \leq x \leq 0 \\ \alpha & 0 \leq x \leq \frac{\alpha-1}{2}t \\ -1 & \frac{\alpha-1}{2}t < x. \end{cases}$$