

ECUACIONES DIFERENCIALES A/B

PRÁCTICA 4: ECUACIÓN DE DIFUSIÓN

Ejercicio 1. Sea u una solución regular de $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

1. Mostrar que $u_\lambda(x, t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ también resuelve la ecuación del calor para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Mostrar que $v(x, t) := x \cdot \nabla u(x, t) + 2tu_t(x, t)$ también resuelve la ecuación del calor.

Ejercicio 2. Diremos que una función u es *calórica* en U si verifica la ecuación del calor $u_t - \Delta u = 0$ en U . Verificar las siguientes afirmaciones indicando en cada caso las hipótesis de regularidad sobre u necesarias para su validez.

1. *Combinaciones lineales:* Si u_1 y u_2 son funciones calóricas, entonces $\alpha u_1 + \beta u_2$ es calórica.
2. *Traslaciones:* Si $u(x, t)$ es calórica, entonces $u(x - \xi, t - \tau)$ es calórica.
3. *Diferenciación respecto a parámetros:* Si $u(x, t, \lambda)$ es calórica para cada λ , entonces $\partial_\lambda u(x, t, \lambda)$ es calórica para cada λ .
4. *Integración respecto a parámetros:* Si $u(x, t, \lambda)$ es calórica para cada λ , entonces $\int_a^b u(x, t, \lambda) d\lambda$ es calórica.
5. *Diferenciación respecto a x y t :* Si $u(x, t)$ es calórica, entonces $D_x^\alpha \partial_t^k u$ es calórica.
6. *Integración respecto a x y t :* Si $u(x, t)$ es calórica, $n = 1$, entonces $\int_{x_0}^x u(y, t) dy$ es calórica si $\partial_x u(x_0, t) = 0$ y $\int_a^t u(x, s) ds$ es calórica si $u(x, a) = 0$.
7. *Convoluciones:* Si $u(x, t)$ es calórica, entonces $\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y, t)\varphi(y) dy$ y $\int_a^b u(x, t-s)\varphi(s) ds$ son calóricas.

Ejercicio 3. 1. Si $\phi = \phi(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$, es una solución con simetría esférica de la ecuación del calor en \mathbb{R}^3 (i.e. $\phi(x, t) = w(|x|, t)$ con $w : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$), entonces ϕ satisface

$$(1) \quad \phi_{rr} + \frac{2}{r}\phi_r = \phi_t \quad t > 0, \quad r > 0.$$

2. Mostrar que la ecuación (1) puede reducirse mediante el cambio $\psi = r\phi$ a la ecuación del calor unidimensional.

Ejercicio 4. Para $i = 1, \dots, n$ consideramos $u_i = u_i(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, soluciones de

$$\begin{cases} \partial_t u_i = \partial_{xx} u_i \\ u_i(x, 0) = \varphi_i(x). \end{cases}$$

Probar que si definimos para $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_1(x_1, t) \cdots u_n(x_n, t) \\ \varphi(x) &= \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \end{aligned}$$

entonces u es solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ con $u(x, 0) = \varphi(x)$.

Ejercicio 5. Supongamos $n = 1$ y $u(x, t) \equiv v(x^2/t)$.

1. Mostrar que $u_t = \partial_{xx} u$ si y sólo si

$$(2) \quad 4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0.$$

2. Verificar que la solución general de (2) es

$$v(z) = C_1 \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2} ds + C_2.$$

3. Derivar $v(x^2/t)$ respecto a x y seleccionar C_1 adecuadamente para obtener la solución fundamental Φ .

Ejercicio 6. Sea

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad (x \in \mathbb{R}^N, t > 0),$$

donde α y β son constantes.

1. Verificar que u satisface la ecuación del calor si y sólo si v satisface

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0,$$

para $y = t^{-\beta} x$.

2. Verificar que si $\beta = 1/2$, v satisface

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot Dv + \Delta v = 0.$$

3. Verificar que si v es radial, i.e. $v(y) = w(|y|)$ para $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces w satisface

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0,$$

donde $r = |y|$, $' = \frac{d}{dr}$.

4. Tomar $\alpha = n/2$ y hallar la solución fundamental de la ecuación del calor.

Ejercicio 7 (Método de similaridad).

1. Hallar todas las soluciones de la ecuación del calor unidimensional que satisfacen

$$\phi(x, t) = \phi(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Mostrar que el método de similaridad dado en el item anterior también puede aplicarse a la ecuación del calor no lineal

$$\partial_x (K(u) \partial_x u) = \partial_t u, \quad K \in C^1.$$

Ejercicio 8.

- Sea $a(t) > 0$ una función continua y sea $u(x, t)$ una solución regular de $u_t = a \Delta u$. Mostrar que existe un cambio de variables $t = \phi(\tau)$ tal que $U(x, \tau) = u(x, \phi(\tau))$ es solución de la ecuación del calor.
- Sea $b(t) \in \mathbb{R}^n$ continua y sea $u(x, t)$ solución regular de $u_t = \Delta u + b \cdot \nabla u$. Mostrar que existe un cambio de variables $x = \psi(y, t)$ tal que $U(y, t) = u(\psi(y, t), t)$ es solución de la ecuación del calor.
- Sea $c(t) \in \mathbb{R}$ continua y sea $u(x, t)$ solución regular de $u_t + cu = \Delta u$. Mostrar que existe $\varphi(t)$ derivable, tal que $U(x, t) = u(x, t) \varphi(t)$ es solución de la ecuación del calor.
- Escribir una fórmula explícita para una solución de

$$\begin{cases} au_t + cu = \Delta u + b \cdot \nabla u + f & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u = g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

donde $c(t) \in \mathbb{R}$, $a(t) > 0$ y $b(t) \in \mathbb{R}^n$ son continuas.

Ejercicio 9 (Principio de Duhamel). Sea u la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - \partial_{xx} u = g(x, t) & \text{en } (0, L) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{en } t > 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{en } (0, L). \end{cases}$$

Probar que u puede ser representada en la forma

$$u(x, t) = \int_0^t \Phi(x, t; s) ds,$$

donde Φ es la solución del problema

$$\begin{cases} \Phi_t - \Phi_{xx} = 0 & \text{en } (0, L) \times (s, +\infty), \\ \Phi(0, t; s) = \Phi(L, t; s) = 0 & \text{en } t > s, \\ \Phi(x, s; s) = g(x, s) & \text{en } (0, L). \end{cases}$$

Ejercicio 10. Usar la transformada de Fourier para resolver el problema

$$\begin{cases} u_t - k\partial_{xx}u = g(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde f y $g(\cdot, t)$ para cada t fijo, son funciones de \mathcal{S} .

Ejercicio 11. Deduzca la fórmula explícita

$$u(x, t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{\frac{-x^2}{4(t-s)}} h(s) ds$$

para la solución de

$$\begin{cases} u_t - \partial_{xx}u = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = h(t), \end{cases}$$

donde $h(0) = 0$. (Pista: defina $v(x, t) = u(x, t) - h(t)$ y extienda a v por imparidad.)

Ejercicio 12. Mostrar que la solución acotada de

$$\begin{cases} u_t - \partial_{xx}u = 0, & x > 0, t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

viene dada por la fórmula

$$u(x, t) = \int_0^\infty N(x, \xi, t) f(\xi) d\xi,$$

donde $N(x, \xi, t) = \Phi(x - \xi, t) + \Phi(x + \xi, t)$ y Φ es la solución fundamental de la ecuación del calor. (Pista: Extender f por paridad a $-\infty < x < 0$ y resolver el problema de valores iniciales para la f extendida.)

Ejercicio 13. Sea $u(x, t)$ solución del problema

$$\begin{cases} u_t = \partial_{xx}u, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

dada por la convolución de φ en la variable x con la solución fundamental. Probar que si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $u(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}) \forall t > 0$ y

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx, \quad \forall t > 0.$$

Ejercicio 14. Decimos que $v \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ es una *subsolución* de la ecuación del calor si

$$v_t - \Delta v \leq 0 \text{ en } U_T.$$

1. Probar que $\max_{U_T} v = \max_{\Gamma_T} v$.

2. Sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un función suave y convexa. Probar que si u es solución de la ecuación del calor y $v = \phi(u)$, entonces v es una subsolución.
3. Probar que $v = |\nabla u|^2 + u_t^2$ es una subsolución si u es una solución de la ecuación del calor.

Ejercicio 15. 1. Sea $C(x, t; r) = B(x, r) \times (t - r^2, t]$. Probar que si $u(x, t)$ es solución de la ecuación del calor en $C(0, 0; 2)$, existe una constante C universal tal que

$$\max_{C(0,0;1)} |\nabla_x u(x, t)| \leq C \max_{C(0,0;2)} |u(x, t)|.$$

2. Con la notación del ejercicio anterior, probar que si $K \subset \overline{U_T} \setminus \partial_p U_T$ es compacto, existe entonces una constante C que depende de $dist(K, \partial_p U_T)$ tal que

$$\max_K |\nabla_x u(x, t)| \leq C \max_{U_T} |u(x, t)|.$$

Ejercicio 16. Sean u_n soluciones regulares del siguiente problema

$$\begin{cases} (u_n)_t - \Delta u_n = 0 & \text{en } U_T \\ u_n = f_n & \text{en } \partial_p U_T, \end{cases}$$

Probar que si $f_n \rightrightarrows f$ uniformemente en $\partial_p U_T$, entonces existe u regular tal que $u_n \rightarrow u$ uniformemente sobre U_T y u es solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } U_T \\ u = f & \text{en } \partial_p U_T. \end{cases}$$

Ejercicio 17. Sea u una solución acotada de la ecuación del calor en \mathbb{R}^{n+1} . Probar que u es constante. ¿Es cierto el resultado si eliminamos la hipótesis que u sea acotada?

Ejercicio 18. Sea u una solución de la ecuación del calor en \mathbb{R}^{n+1} tal que $u = 0$ en $x_1 = 0$, uniformemente Lipschitz. Probar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $u(x, t) = \alpha x_1$.

Ejercicio 19 (Principio del máximo para problemas parabólicos). Definimos

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \partial_i u,$$

donde los coeficientes a_{ij}, b_i son continuos, $a_{ij} = a_{ji}$ y la matriz $A = (a_{ij})$ es definida positiva. Es decir, \mathcal{L} es un operador elíptico según la definición del Ejercicio 18 de la práctica 2.

Probar que si $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ satisface

$$u_t + \mathcal{L}u = 0 \quad \text{en } U_T,$$

entonces

$$\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

Al operador $\partial_t + \mathcal{L}$ se lo denomina *operador parabólico*.

Ejercicio 20. Sea $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x) & \text{en } U_T, \\ u = 0 & \text{en } \partial_p U_T. \end{cases}$$

Probar que si $f \leq 0$, entonces $u_t \leq 0$.

(Sugerencia: Definir $w(x, t) = u(x, t + \varepsilon) - u(x, t)$, calcular $w_t - \Delta w$ y aplicar el principio del máximo.)

Ejercicio 21. Consideremos el paseo aleatorio simétrico. Supongamos que en el punto $L = \bar{m}h + h/2 > 0$ se ubica una barrera perfectamente refractante. Por esto nos referimos que si una partícula llega al punto $L - h/2$ a tiempo t y se mueve hacia la derecha, entonces es reflejada y regresa al punto $L - h/2$ en el tiempo $t + \tau$.

Mostrar que cuando $h, \tau \rightarrow 0$ y $h^2/\tau = 2D$, $p = p(x, t)$ es una solución del problema

$$\begin{cases} p_t - Dp_{xx} = 0 & x < L, t > 0 \\ p(x, 0) = \delta & x < L \\ p_x(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Más aún $\int_{-\infty}^L p(x, t) dx = 1$. Calcular explícitamente la solución.

Ejercicio 22. Consideremos el paseo aleatorio simétrico. Supongamos que en el punto $L = \bar{m}h > 0$ se ubica una barrera perfectamente absorbente. Por esto nos referimos a que si una partícula llega al punto $L - h$ a tiempo t y se mueve a la derecha, es absorbida y se detiene en L . Mostrar que cuando $h, \tau \rightarrow 0$ y $h^2/\tau = 2D$, $p = p(x, t)$ es una solución del problema

$$\begin{cases} p_t - Dp_{xx} = 0 & x < L, t > 0 \\ p(x, 0) = \delta & x < L \\ p(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Calcular explícitamente la solución.