

## ECUACIONES DIFERENCIALES A/B

### PRÁCTICA 2: ECUACIÓN DE LAPLACE Y DE POISSON

**Ejercicio 1.** Probar que la ecuación de Laplace  $\Delta u = 0$  es invariante por rotaciones.

Esto es, si  $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz ortogonal (i.e.  $O \cdot O^T = I_n$ ) y definimos  $v(x) = u(Ox)$ , entonces  $\Delta v = 0$ .

**Ejercicio 2.** Verificar las siguientes afirmaciones indicando en cada caso las hipótesis de regularidad sobre  $u$  necesarias para su validez.

1. *Combinaciones lineales:* Si  $u_1$  y  $u_2$  son funciones armónicas, entonces  $\alpha u_1 + \beta u_2$  es armónica.
2. *Homotecias:* Si  $u$  es armónica, entonces  $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$  es armónica.
3. *Traslaciones:* Si  $u$  es armónica, entonces  $u(x - \xi)$  es armónica.
4. *Diferenciación respecto a parámetros:* Si  $u(x, \gamma)$  es armónica para cada  $\gamma$ , entonces  $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x, \gamma)$  es armónica para cada  $\gamma$ .
5. *Integración respecto a parámetros:* Si  $u(x, \gamma)$  es armónica para cada  $\gamma$ , entonces  $\int_a^b u(x, \gamma) d\gamma$  es armónica.
6. *Diferenciación respecto a  $x$ :* Si  $u$  es armónica, entonces  $D^\alpha u$  es armónica para todo multiíndice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .
7. *Convoluciones:* Si  $u$  es armónica, entonces  $\int u(x - \xi) \varphi(\xi) d\xi$  es armónica.

**Ejercicio 3.** Sea  $u$  armónica en  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ , abierto simplemente conexo. Probar que entonces existe  $v$  armónica en  $U$  tal que  $u + iv$  es holomorfa.

**Ejercicio 4.** Decimos que  $v \in C^2(U)$  es subarmónica si  $\Delta v \geq 0$  en  $U$ .

1. Probar que si  $v \in C(\bar{U})$  entonces  $\max_{\bar{U}} v = \max_{\partial U} v$ .  
Sugerencia: Probarlo primero suponiendo que  $v$  satisface que  $\Delta v > 0$  y luego probarlo para  $v_\varepsilon(x) := v(x) + \varepsilon|x|^2$  y hacer  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
2. Probar que si  $x_0 \in U$  y  $r < d(x_0, \partial U)$ , entonces
 
$$v(x_0) \leq \int_{B(x_0, r)} v(\xi) d\xi$$
3. Probar que  $v$  verifica el principio fuerte del máximo.
4. Sea  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa y regular. Si  $u$  es armónica y  $v = \phi(u)$ , entonces  $v$  es subarmónica.
5. Probar que  $v = |\nabla u|^2$  es subarmónica, si  $u$  es armónica.

**Ejercicio 5.** Sea  $u \in C^2(B_1(0)) \cap C(\overline{B_1(0)})$  una solución regular de

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } B_1(0) \\ u = g & \text{en } \partial B_1(0). \end{cases}$$

Probar que existe una constante  $C$ , que depende sólo de la dimensión del espacio, tal que

$$\max_{B_1(0)} |u| \leq C \left( \max_{\partial B_1(0)} |g| + \max_{B_1(0)} |f| \right).$$

¿Es cierta la conclusión del ejercicio si cambiamos  $B_1(0)$  por  $U$  un dominio acotado cualquiera?

**Ejercicio 6.** Notemos por  $B_1^+$  a la semi bola  $\{x \in \mathbb{R}^n / |x| < 1, x_n > 0\}$ . Sea  $u \in C(\overline{B_1^+})$ , armónica en  $B_1^+$  con  $u = 0$  en  $\partial B_1^+ \cap \{x_n = 0\}$  y notamos  $x = (x', x_n)$  con  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Definimos

$$U(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x_n \geq 0, \\ -u(x', -x_n) & \text{si } x_n < 0, \end{cases}$$

para  $x \in B_1(0)$ . Probar que  $U$  es armónica en  $B_1(0)$ . Concluir que  $u$  es  $C^\infty$  hasta  $\{x_n = 0\}$ .

**Ejercicio 7.** 1. Sea  $u$  una función armónica en  $B_1(0)$ . Probar que

$$\sup_{B_{1/2}(0)} |\nabla u(x)| \leq C \sup_{B_1(0)} |u(x)|,$$

donde  $C$  depende sólo de la dimensión del espacio.

2. Sea  $u$  armónica en  $U$  y sea  $V \subset\subset U$ . Probar que entonces se tiene

$$\sup_V |\nabla u| \leq C \sup_U |u|,$$

donde  $C$  es una constante positiva que sólo depende de la dimensión del espacio y de  $\text{dist}(V, \partial U)$ .

3. Deducir del item 1 que si  $u$  es armónica en  $B_R(0)$ , entonces

$$\sup_{B_{R/2}(0)} |\nabla u(x)| \leq \frac{C}{R} \sup_{B_R(0)} |u(x)|,$$

donde  $C$  es la constante del item 1.

4. Concluir que si  $u$  es armónica en  $\mathbb{R}^n$  y acotada, entonces  $u$  es constante.

**Ejercicio 8.** Probar que existe a lo sumo una solución acotada del problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}_+^n, \\ u = g & \text{en } \partial \mathbb{R}_+^n. \end{cases}$$

¿Sigue valiendo la unicidad si eliminamos la hipótesis de que  $u$  sea acotada?

**Ejercicio 9.** Sea  $\{u_k\}_{k=1}^\infty$  una sucesión de funciones armónicas en  $U$  que converge uniformemente sobre los compactos de  $U$  a una función  $u$ . Probar que  $u$  es armónica.

**Ejercicio 10.** Sea  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  ( $U$  acotado), las soluciones de los siguientes problemas,

$$\begin{cases} \Delta u_k = 0 & \text{en } U \\ u_k = g_k & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

Probar que si  $g_k \rightrightarrows g$  uniformemente en  $\partial U$ , entonces existe  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  tal que  $u_k \rightrightarrows u$  uniformemente en  $U$  y  $\Delta u = 0$  en  $U$ .

**Ejercicio 11** (Teorema de Harnack de convergencia monótona). Sea  $\{u_k\}_{k=1}^\infty$  una sucesión monótona de funciones armónicas en un dominio  $U$ , entonces la sucesión converge en todo punto o diverge en todo punto. En el primer caso, la convergencia es uniforme sobre compactos y el límite es una función armónica.

**Ejercicio 12.** Probar que si  $u$  es armónica en  $\mathbb{R}^n$  y  $|u(x)| \leq C(1 + |x|^k)$ , entonces  $u$  es un polinomio de grado a lo sumo  $k$ .

**Ejercicio 13.** Probar que si el problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } U, \\ \partial_{\mathbf{n}} u = g & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

tiene una solución en  $U$  acotado ( $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ ) entonces

$$\int_U f(x) dx = \int_{\partial U} g(x) dS.$$

Relacionar con el Ejercicio 10 de la práctica 1.

**Ejercicio 14.** Sea  $U$  un dominio con borde regular. Probar que si  $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$  es solución de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } U, \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

entonces  $u$  es constante.

**Ejercicio 15.** Determinar la función de Green para la región  $U = B_R(0) \setminus B_r(0)$  con  $0 < r < R$ .

**Ejercicio 16.** Sea  $u \in C^2(B_R(0)) \cap C(\bar{B}_R(0))$  una función armónica y no negativa. Probar la siguiente forma de la *desigualdad de Harnack*

$$\frac{R^{n-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{n-1}} u(0).$$

**Ejercicio 17.** Una función  $u \in C(U)$  se dice subarmónica (superarmónica) en  $U$  si para cada bola  $B \subset\subset U$  y para cada función  $h$  armónica en  $B$  que satisface  $u \leq h$  ( $u \geq h$ ) en  $\partial B$ , se tiene que  $u \leq h$  ( $u \geq h$ ) en  $B$ .

1. Mostrar que si  $u \in C^2(U)$ ,  $u$  es subarmónica (según esta definición) si y sólo si  $\Delta u \geq 0$ .
2. Si  $u$  es subarmónica en  $U$ , entonces satisface el principio fuerte del máximo; y si  $v$  es superarmónica en  $U$  acotado, con  $v \geq u$  en  $\partial U$ , entonces  $v > u$  en  $U$  o  $v \equiv u$ .
3. Sea  $u$  subarmónica en  $U$  y  $B \subset\subset U$ . Notamos con  $\tilde{u}$  la función armónica en  $B$  (dada por la integral de Poisson) que satisface  $\tilde{u} = u$  en  $\partial B$ . Definimos el *levantamiento armónico* de  $u$  en  $B$  por

$$v(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x), & x \in B, \\ u(x), & x \in U \setminus B. \end{cases}$$

Entonces  $v$  es subarmónica en  $U$ .

4. Si  $u_1, \dots, u_N$  son subarmónicas en  $U$ , entonces

$$u(x) = \max\{u_1(x), \dots, u_N(x)\}$$

es subarmónica en  $U$ .

5. Enunciar y demostrar los correspondientes resultados para funciones superarmónicas.

**Ejercicio 18** (Principio débil del máximo). Sea

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u + c(x)u,$$

donde  $a_{ij}, b_i$  y  $c$  son funciones continuas en  $\bar{U}$  y  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ . La matriz  $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  es simétrica y definida positiva para cada  $x \in \bar{U}$  (un operador  $\mathcal{L}$  con estas propiedades se dice *elíptico*). Probar que si  $\mathcal{L}u \leq 0$  en  $U$  y  $c \equiv 0$  entonces el máximo de  $u$  se alcanza en  $\partial U$ .

Sugerencia: Usar que si  $A, B$  son matrices simétricas y semidefinidas positivas de  $n \times n$ , entonces  $\text{tr}(A \cdot B) \geq 0$ . ¡Demostrar este hecho!

**Ejercicio 19.** 1. Sea  $\mathcal{L}$  un operador elíptico (como fuera definido en el ejercicio anterior) y supongamos que  $c \geq 0$  en  $U$ . Si  $\mathcal{L}u \leq 0$ , entonces

$$\max_{\bar{U}} u \leq \max_{\partial U} u^+$$

donde  $u^+ = \max\{u, 0\}$ .

2. Dar un contraejemplo para el item 1 si  $c < 0$ .
3. Sea  $U$  acotado y  $c \geq 0$ . Si  $\mathcal{L}u = \mathcal{L}v$  en  $U$  y  $u = v$  en  $\partial U$  entonces  $u = v$  en  $U$ .
4. Dar un contraejemplo para el item 3 si  $U$  no es acotado.

**Ejercicio 20** (Lema de Hopf). Sea  $U$  un dominio con la propiedad que para todo  $x_0 \in \partial U$ , existe una bola  $B_r(y) \subset U$  tal que  $x_0 \in \partial B_r(y)$  (esto se conoce como la propiedad de bola tangente interior). Sea  $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$  tal que  $\Delta u \geq 0$  en  $U$ ,  $x_0 \in \partial U$  y  $u(x_0) > u(x)$  para todo  $x \in U$ . Entonces

$$\partial_{\mathbf{n}} u(x_0) > 0$$

**Ejercicio 21.** Usar el lema de Hopf para dar otra demostración del principio fuerte del máximo.

**Ejercicio 22.** Demostrar que si  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un abierto con frontera de clase  $C^2$  entonces posee la propiedad de la bola tangente exterior.

**Ejercicio 23.** Mostrar que el problema de Dirichlet es resoluble para todo dominio  $U \subset \mathbb{R}^n$  que satisface la propiedad del *cono exterior*; esto es, para todo  $y \in \partial U$  existe un cono circular finito  $K$  con vértice en  $y$  ta que  $\bar{K} \cap \bar{U} = \{y\}$ .

Sugerencia: Mostrar que en cada punto  $y \in \partial U$  puede elegirse una barrera de la forma  $w = r^\lambda f(\theta)$  donde  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times S^{n-1}$  son las variables polares centradas en  $y$ .