Clase pasada:

Dada $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ de cuadrado integrable tenemos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \quad \text{(en sentido de media cuadrática)}$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx},$$

Vimos cómo calcular los coeficientes de Fourier (y la relación entre ambas series).

Bessel: f de cuadrado integrable entonces $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 + |b_n|^2 \leq \|f\|^2$.

Parseval: $\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$.

Comentario: Vale algo un poco más gral, para definir la serie (y calcular los coeficientes de Fourier) alcanza que $\int |f| < \infty$ (f integrable)

Lema (Riemann - Lebesgue): Si $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ es integrable,

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = 0$$

(Para funciones de cuadrado integrable es consecuencia de Bessel)

Corolario:

Si g es continua a trozos en $[0, \pi]$, entonces

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^{\pi} g(t) \operatorname{sen}((m + \tfrac{1}{2})t)\, dt = 0.$$

Dem (Ver si hacer la demo)

$$\int_0^{\pi} g(t) \operatorname{sen}((m + \tfrac{1}{2})t)\, dt = \int_0^{\pi} g(t) \operatorname{sen}(mt) \cos(t/2)\, dt +$$

$$+ \int_0^{\pi} g(t) \operatorname{sen}(t/2) \cos(mt)\, dt = \int_0^{\pi} \tilde{g}(t) \operatorname{sen}(mt) \cos(t/2)\, dt +$$

$$\int_0^{\pi} \tilde{g}(t) \operatorname{sen}(t/2) \cos(mt)\, dt \to 0 \quad \text{por Riemann Lebesgue para } \begin{array}{l} \tilde{g}(t)\cos(t/2) \\ \tilde{g}(t)\operatorname{sen}(t/2) \end{array}$$

$\tilde{g}$ la extensión a $[-\pi, \pi]$ como 0 en $[-\pi, 0)$.

Convergencia:

Queremos estudiar cuándo tenemos convergencia puntual / uniforme.

Notación: Dado $N \in \mathbb{N}$, escribimos $S_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$

Obs: $S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$.

Convergencia Puntual: $S_N f$ converge a f puntualmente en x si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0$ (que depende de ε y de x) tq $\forall N \geq N_0$

$$| S_N f(x) - f(x) | < \varepsilon$$

Es decir, $\lim_{N \to +\infty} S_N f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = f(x)$.

Decimos que f es continua a trozos si para cada $x \in \mathbb{R}$, los límites laterales

$$f(x+0) = \lim_{t \to 0^+} f(x+t) \quad \text{y} \quad f(x-0) = \lim_{t \to 0^+} f(x-t)$$

existen y son finitos y f tiene a lo sumo finitas discont. en cada intervalo acotado.

Def: Decimos que f tiene derivadas laterales en x si los límites

$$f'(x+0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \quad \text{y}$$

$$f'(x-0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{-t}$$

Existen y son finitos.

Teorema (de convergencia puntual):

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) 2π-periódica, continua a trozos. Entonces

$$\lim_{N \to +\infty} S_N f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$ en cada x donde f tiene derivadas laterales

Idea de la demo:

1ero: Buscamos escribir $S_N f(x)$ de manera conveniente.

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt}_{c_n}\; e^{inx}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-in(t-x)}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \Big(\underbrace{\sum_{n=-N}^{N} e^{-in(t-x)}}_{D_N} \Big)\, dt$$

Def: Definimos $D_N(s) = \sum_{n=-N}^{N} e^{ins}$ (Núcleo de Dirichlet).

La cuenta anterior dice:

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_N(x-t)\, dt .$$

Queremos probar que $S_N f(x) \longrightarrow \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

Plan: Usar propiedades de D_N y la fórmula de $S_N f(x)$.

$$D_N(s) = \sum_{n=-N}^{N} e^{ins} = e^{-iNs} + e^{-i(N-1)s} + \dots + e^{-is} + e^{0} + e^{is} + e^{i2s} + \dots + e^{iNs}$$

$$= e^{-iNs}\left(e^{0} + e^{is} + \dots + e^{i2Ns}\right) \to \text{Suma de potencias de } e^{is}.$$

$$= e^{-iNs} \cdot \sum_{n=0}^{2N} e^{ins}$$

Usando la fórmula de la geométrica se puede probar que:

$$D_N(s) = \frac{\operatorname{sen}((N+½)s)}{\operatorname{sen}(s/2)} .$$

Cuenta:

$$D_N(s) = e^{-iNs} \cdot \frac{e^{is(2N+1)} - 1}{e^{is} - 1} = \frac{e^{is(N+1)} - e^{-iNs}}{e^{is} - 1}$$

$$= \frac{e^{is/2}}{e^{is/2}} \; \frac{e^{is(N+½)} - e^{-is(N+½)}}{e^{is/2} - e^{-is/2}} = \frac{\operatorname{sen}((N+½)s)}{\operatorname{sen}(s/2)} .$$

Propiedades de D_N:

1) D_N es par.

2) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt = 1.$

3) D_N es 2π-Periódica.

<u>Dem</u>:

1) $D_N(s) = \frac{\operatorname{sen}((N+\frac{1}{2})s)}{\operatorname{sen}(s/2)}$ es producto de funciones impares, es par.

2) $D_N(s) = \sum_{n=-N}^{N} e^{ins} \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} e^{int}}_{D_N(t)} dt = \sum_{n=-N}^{N} \langle e^{int}, e^{0} \rangle = 1.$

3) $D_N(s) = \sum_{n=-N}^{N} e^{ins}$ es suma de funciones 2π-periódicas.

Dem del Teo de conv. puntual (o para qué hicimos todo el lío de D_N)

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) D_N(u)\,du$$

así empezamos

$u = x - t$

$t = x - u$

2π - periódicas.

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x-u) D_N(u)\,du + \int_{-\pi}^{0} f(x-u) D_N(u)\,du\right)$$

$$\int_{-\pi}^{0} f(x-u) D_N(u)\,du = \int_0^{\pi} f(x+u) D_N(u)\,du$$

Vamos a probar que

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x+t) D_N(t)\,dt = \frac{f(x+0)}{2}$$

(El límite del otro término es $\frac{f(x-0)}{2}$ y se prueba igual).

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x+t) D_N(t)\,du - \frac{f(x+0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x+t) D_N(u)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{f(x+0)}_{\text{cte}}\underbrace{D_N(t)\,dt}_{\text{integra } 1/2}$$

(D_N es par e integra 1 en todo el intervalo)

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \big(f(x+t) - f(x+0)\big) D_N(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{\operatorname{sen}(t/2)} \operatorname{sen}\big((N+1/2)t\big)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} \cdot \frac{t}{\operatorname{sen}(t/2)} \cdot \operatorname{sen}\big((N+1/2)t\big)\,dt$$

Si llamamos $g(t) = \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} \cdot \frac{t}{\operatorname{sen}(t/2)}$, como f es continua a trozos, g es cont. a trozos en $(0,\pi]$. Además en 0,

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} \cdot \frac{t}{\operatorname{sen}(t/2)}$$

existe y es finito.

El lím existe y es finito pq f tiene derivadas laterales.

$\Rightarrow$ g es cont. a trozos en $[0,\pi]$.

$\Rightarrow$ Después de hacer cuentas,

Cont. a trozos.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x+t)\,D_N(t)\,du - \frac{f(x+0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(t).\operatorname{Sen}((N+1/2)t)\,dt \longrightarrow 0$$

(Por el corolario de Riemann - Lebesgue).

Conclusión:

$$S_N f(x) \longrightarrow \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

¿Cuándo tenemos convergencia uniforme?

Teorema: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) 2π-periódica, continua y con derivadas laterales en todo x. Supongamos además que f' es cont. a trozos. Entonces

$$S_N f(x) \longrightarrow f(x) \text{ uniformemente.}$$

Más aún, $S_N f$ converge absolutamente

Obs: Si f cumple las hipótesis del Teorema, f y f' tienen desarrollo en serie de Fourier. Más aún, se puede obtener la serie de f' derivando término a término la de f.

(La demo es usar integración por partes).

Dem del Teo:

Como f cumple las hipótesis de conv. puntual (y es continua),

$$S_N f(x) \longrightarrow f(x) \text{ puntualmente.}$$

Vamos a probar que la serie $S_N f(x)$ converge absoluta y unif.

(esto alcanza pq ya sabemos a qué converge).

Lo vemos para la serie trigonométrica (la otra demo es similar)

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{Cos}(nx) + b_n \operatorname{Sen}(nx)$$

Queremos ver que conv. abs + unif. Usamos Weierstrass.

Alcanza con analizar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{Cos}(nx) + b_n \operatorname{Sen}(nx)$

$$|a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{Sen}(nx)| \leq |a_n| + |b_n|$$

Veamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$.

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{Sen}(nx),$$

$$f' \sim \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos(nx) + \tilde{b}_n \operatorname{Sen}(nx)$$

Pero si derivamos término a término la serie de f obtenemos:

$$\tilde{a}_n = n\, b_n, \qquad \tilde{b}_n = -n\, a_n.$$

Producto de vectores.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} |a_n| = \sum_{n=1}^{N} \frac{|\tilde{b}_n|}{n} = \left| \left\langle (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n), \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{N}\right) \right\rangle \right|$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{N} |\tilde{b}_n|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}$$

Cauchy - Schwarz

Como $\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{b}_n|^2 \leq \|f'\|^2$ (por Bessel) y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

acá usamos f' cont. a trozos.

$\Rightarrow \sum |a_n|$ converge. Con la misma idea se prueba $\sum |b_n|$ converge

$\Rightarrow$ x Weierstrass, la serie de Fourier conv. abs + unif.

Ej: Sea $f(x) = x^2$ en $[-\pi, \pi]$ y $\phi(x)$ su extensión 2π - periódica a $\mathbb{R}$.
Analizar la conv. puntual / unif. de la serie de Fourier de ϕ.
Calcular $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$.