Series de Fourier:

Dada $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) (ó una función 2π-periódica en $\mathbb{R}$), queremos estudiar bajo qué condiciones podemos representar a $f(x)$ como

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\right)$$

Obs: En gral, para funciones con periodo T sería

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)+b_n\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right).$$

Producto interno / media cuadrática:

En el espacio de funciones de $[a,b]\to\mathbb{R}$ continuas a trozos podemos definir el producto interno:

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x).g(x)\,dx.$$

Comentario 1: En realidad se puede definir este producto interno para funciones de cuadrado integrable: $\int_a^b|f(x)|^2dx<\infty$.

Comentario 2: Para funciones $[a,b]\to\mathbb{C}$, $\langle f,g\rangle=\int f.\bar{g}\,dx$.

El producto vectorial define una norma: $\|f\|=\left(\int_a^b|f(x)|^2dx\right)^{1/2}=\langle f,f\rangle^{1/2}$.

En la materia la llaman media cuadrática, la pueden encontrar en libros como $\|\cdot\|_2$ ó $\|\ \|_{L_2}$.

A partir de la teoría de espacios vectoriales con producto interno tenemos una primer idea de cómo aproximar funciones:

Proposición: Sea V un espacio vectorial con p.i. y $(\phi_n)_{n\geq1}$ un sist. ortonormal en V. Entonces la mejor aproximación en media cuadrática de f por una funcion $\sum_{n=1}^{N}c_n\phi_n$ es tomar $c_n=\langle f,\phi_n\rangle$.

Dem: Fijado N, buscamos $c_1, \dots, c_N$ que minimice
$$\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n \|^2$$

Por definición, $\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n \|^2 = \langle f - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n , f - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n \rangle$

$$= \langle f, f \rangle - 2 \langle f, \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n \rangle + \langle \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n , \sum_{m=1}^{N} c_m \phi_m \rangle .$$

$$= \| f \|^2 - 2 \sum_{n=1}^{N} c_n \langle f, \phi_n \rangle + \sum_{n=1}^{N} c_n^2$$

Parece un doble producto

el 1er término del doble producto al cuadrado

Completando cuadrados obtenemos:

$$= \| f \|^2 + \sum_{n=1}^{N} (c_n - \langle f, \phi_n \rangle)^2 - \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle^2 .$$

Fijo

Fijo.

Esta cuenta va a ser lo más chica posible cuando $c_n = \langle f, \phi_n \rangle$.

En ese caso,

$$\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\langle f, \phi_n \rangle^2}_{c_n^2} \geq 0$$

Corolario: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \| f \|^2$ $\longrightarrow$ Desig. de Bessel.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ converge.

3) $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$.

Caso particular:

Vieron que $\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx) \}_{n \geq 1}$ es un sistema ortonormal con el

Producto:
$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx .$$

En este caso, por comodidad, $a_0 = \sqrt{2}\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$,

$a_n = \langle f, \cos(nx)\rangle$, $b_n = \langle f, \operatorname{sen}(nx)\rangle$

A estos coeficientes se los llama coeficientes de Fourier.

Bessel: $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leq \|f\|^2$.

Si consideramos sólo los 1eros N términos, la mejor aprox. en media cuadrática de f es

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$ $\rightsquigarrow$ A este tipo de funciones se las llama polinomios trigonométricos.

Ej: Sea $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$. Calculemos su desarrollo en serie de Fourier de sen y cos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, dx = 0.$$

Para $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\, dx \overset{\text{Partes}}{=} \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\, dx\right]$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}\right] = 0$$

Obs: Esto ya lo sabíamos pq x es impar. En gral si f es impar, $a_n = 0\ \forall n$ (y si f es par, $b_n = 0\ \forall n$).

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen}(nx)\, dx \underset{\text{Partes}}{=} \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\Rightarrow \quad x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(nx).$$

Obs: Estas dos funciones no coinciden en $-\pi$ ni en π. ¿En qué sentido

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(nx)\ ?$$

Vale: La serie converge a x en $(-\pi, \pi)$ y es "igual" a x en media cuadrática.

Igualdad en media cuadrática:

Dijimos: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx) \right\}$ es un sistema ortonormal en las funciones cont. a trozos en $[-\pi, \pi]$ (con el producto $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f.g$).

Entonces: Para finitos términos, la mejor aprox de f por polinomios trigonométricos es $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$ donde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx.$$

Donde $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + b_n^2 \leq \|f\|^2$ (Bessel)

y en part, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ (Lema de Riemann-Lebesgue).

Idea: Tomar más términos (todos) debería mejorar la aproximación.

Def: Un sistema ortonormal $(\phi_n)_{n\geq 1}$ en V se dice completo si $\forall N$

$$\lim_{N\to+\infty} \| f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n\rangle . \phi_n \| = 0.$$

Prop: Con estas hipótesis, $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n\rangle^2 = \|f\|^2$.

Ej: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx) \right\}$ es un sist. ortonormal completo.

Una función de cuadrado integrable.

En part, si $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$

entonces 1) $\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$.

2) f "$=$" $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$ en media cuadrática.

Esto dice que la serie de Fourier "identifica" a f (en media cuadrática).

Aplicación:

Vimos $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2(-1)^{n+1}}{n}}_{b_n} \operatorname{sen}(nx)$.

Obs: $\|x\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{1}{\pi} \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{2\pi^2}{3}$.

Como la función $f(x) = x$ es de cuadrado integrable, vale la igualdad de Parseval: $\|x\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$

en este caso

Como $\|x\|^2 = \frac{2\pi^2}{3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3}$.

Series de Fourier complejas:

Para funciones $[-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ (de cuadrado integrable) podemos definir el producto interno

$\int |f|^2 < \infty$.

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx.$$

Para estas funciones, $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un sistema ortogonal completo.

$\Rightarrow \quad f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, con $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{e^{inx}}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,dx$.

Notación: $c_n = \hat{f}(n)$ es el n-ésimo coeficiente de Fourier.

Obs: En realidad para que $f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ basta pedir $\int |f| < \infty$. es decir f integrable.

En gral, en $[-L, L]$, hay que tomar $\left\{ \frac{e^{\frac{in\pi x}{L}}}{\sqrt{2L}} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$, si $\langle f,g\rangle = \int f.\bar{g}$.

Obs / propiedades:

Para $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ $\qquad f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ $\quad$ y $\quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx.$

1) Si $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces

$$\overline{\hat{f}(n)} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx}\,dx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x) e^{-inx}}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx}\,dx = C_{-n} = \hat{f}(-n)$$

$\bar{f} = f$

2) Si $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$,

Para $k \geq 1$, $\quad C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) . \left(\cos(-kx) + i \operatorname{sen}(-kx)\right) dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(k\pi) - i \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(x)\,dx.$$

$$= \frac{a_k - i b_k}{2}$$

y $\quad C_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(k\pi) + i \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx)\,dx$

$$= \frac{a_k + i b_k}{2}$$

$\Rightarrow \quad a_k = C_k + C_{-k}, \quad b_k = i\,(C_k - C_{-k}).$

Prop: Como $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un sist. ortonormal (completo) también valen Bessel y Parseval.

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx.$$

Hasta ahora vimos f 2π - periódica de cuadrado integrable $\Rightarrow$

$$f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$$ en sentido de

media cuadrática.

¿Cuándo tenemos convergencia puntual?

Teorema: Sea f una función en $[-\pi,\pi]$ de cuadrado integrable si f es C^1 en un entorno del punto $x_0 \in (-\pi,\pi)$ (o en un entorno de los bordes vista como función 2π- periódica en $\mathbb{R}$) entonces

$$S_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

cumple que

$$\lim_{N\to+\infty} S_N f(x_0) \to f(x_0).$$ (Tenemos convergencia puntual en x_0).

Si no tenemos la hipótesis de f C^1 ?

Antes: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que f es continua a trozos si para cada $x \in \mathbb{R}$, los límites laterales

$$f(x+0) = \lim_{t\to0^+} f(x+t) \quad y \quad f(x-0) = \lim_{t\to0^+} f(x-t)$$

existen y son finitos y f tiene a lo sumo finitas discont. en cada intervalo acotado.

<u>Def</u>: Decimos que f tiene derivadas laterales en x si los límites

$$f'(x+0) = \lim_{t\to0^+} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \quad y$$

$$f'(x-0) = \lim_{t\to0^+} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{-t}$$

Existen y son finitos.

Teorema (de convergencia puntual):

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) 2π - periódica, continua a trozos. Entonces

$$\lim_{N\to+\infty} S_N f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$ en cada x donde f tiene derivadas laterales.

(Con esto pueden hacer h / ej 22).

Comentarios sobre series de Fourier:

1) Dada una f integrable en $[-\pi,\pi]$ 2π-periódica (ó 2π-periódica en $\mathbb{R}$),

Podemos pensar $f(t)$ ó podemos pensar a f definida en $|z| = 1$.

$$f(e^{it}) \text{ "=" } f(t). \qquad (\text{Como } f(-\pi) = f(\pi), \text{ está bien definida}).$$

2) $$f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (e^{it})^n$$

$\Rightarrow$ $$f(z) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n \quad \text{para } |z| = 1$$ $\rightsquigarrow$ Y esto es una serie de potencias con potencias negativas.