# Clase Matemática 4

Josefina Villar

1 de noviembre de 2024

**OBJETIVO:**

- Convergencia uniforme de la serie de Fourier.
- Resolución de ecuaciones diferenciables con el método de variables separadas.

## 1. Convergencia uniforme de la serie de Fourier

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) $2\pi$-periódica e integrable, podemos calcular los coeficientes de Fourier

$$c_n = \langle f, e^{inx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

y definir las sumas parciales

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

La clase pasada estudiamos convergencia puntual ($S_N f(x) \to f(x)$ si $f$ es continua en $x$ y tiene derivadas laterales en $x$, idem pero continua a trozos tiende al promedio de los límites laterales).

¿Bajo qué condiciones la serie de Fourier converge uniformemente?
**Observación:**

- Si $S_N f \rightrightarrows f$, entonces $f$ tiene que ser continua.
- NO alcanza con que $f$ sea continua (ni si quiera para convergencia puntual, hay que pedir condiciones sobre la derivada).

**Teorema 1.1.** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) una función $2\pi$-periódica, continua y con derivadas laterales en todo $x$ y tal que $f'$ es continua a trozos, entonces $S_N f \to f$ uniforme y absolutamente.*

*Más aún, $f'$ tiene desarrollo en serie de Fourier dado por derivar término a término la serie de Fourier de $f$.*

**Ejercicio 1.2.** *Calcular la serie de Fourier de la función $f(x) = x^2$ en $[-\pi, \pi]$ extendida a $\mathbb{R}$ y analizar la convergencia puntual y uniforme de $S_N f$.*

*Resolución.* Calculemos los coeficientes $c_n$.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx.$$

Para $n = 0$ se tiene:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Para $n \neq 0$ hacemos partes:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx = x^2 \cdot \frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \cdot \frac{e^{-inx}}{-in} dx$$

$$= x^2 \cdot \frac{e^{-inx}}{n} i\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2i}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot e^{-inx} dx$$

$$= \left(\pi^2 \cdot \frac{e^{-in\pi}}{n} i - \pi^2 \cdot \frac{e^{in\pi}}{n} i\right) - \frac{2i}{n} I.$$

Calculamos $I$ haciendo partes:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot e^{-inx} dx = x \cdot \frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx$$

$$= \left(\pi \cdot \frac{e^{-in\pi}}{n} i + \pi \cdot \frac{e^{in\pi}}{n} i\right) - \frac{1}{(-in)^2} e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi i}{n}(e^{-in\pi} + e^{in\pi}) + \frac{1}{n^2}(e^{-in\pi} - e^{in\pi}) = \frac{\pi i}{n} \cdot 2(-1)^n = \frac{2\pi i}{n}(-1)^n.$$

Luego,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-2i}{n} \cdot \frac{2\pi i}{n}(-1)^n = \frac{2}{n^2}(-1)^n.$$

Notar que $f$ es continua, derivable en $\mathbb{R} - \{n\pi\}$ y las derivadas laterales existen para todo $x$, luego $S_N f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{-N \neq n \leq N, n \neq 0} \frac{-2}{n^2}(-1)^n e^{inx}$ converge puntualmente a $f(x)$ para todo $x$. Además, la derivada $f'$ es continua a trozos (no está definida en $\{n\pi\}$, tiene finitas discontinuidades en cada intervalo acotado) por lo que la serie de Fourier converge uniformemente a $f$ (y también converge absolutamente). Notar que la serie de Fourier de la función $2\pi$-periódica definida por $g(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$ viene dada por $\sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{i}{n}(-1)^n \cdot e^{inx}$, asi que la de $2x$ es $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2i}{n}(-1)^n \cdot e^{inx}$, que puede obtenerse también a partir de derivar término a término la serie de Fourier de $f$:

$$\left(\frac{2}{n^2}(-1)^n e^{inx}\right)' = in\frac{2}{n^2}(-1)^n e^{inx} = \frac{2i}{n}(-1)^n e^{inx}.$$

□

**Observación 1.3.** Podríamos haber partido de la serie de Fourier de $x$, integrar término a término para obtener la de $\frac{x^2}{2}$ y luego multiplicar por 2 para obtener la de $x^2$ (faltaría ver solo el coeficiente $c_0$).

**Ejercicio 1.4.** *Sea $f$ la función $2\pi$-periódica definida por $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ para $|x| \leq \pi$.*

1. *Calcular la serie de Fourier de $f$. ¿Converge uniformemente?*
2. *Probar que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{\tanh(\pi)}$.*
3. *Calcular la serie de Fourier de* $\operatorname{senh}(x)$ *como función $2\pi$-periódica.*

*Resolución.* 1.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x + e^{-x}}{2} e^{-inx} dx = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+in)x} dx$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{e^{(1-in)x}}{1 - in}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-(1+in)x}}{-(1+in)}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{(1-in)\pi}}{1-in} - \frac{e^{-(1-in)\pi}}{1-in} + \frac{e^{-(1+in)\pi}}{-(1+in)} - \frac{e^{(1+in)\pi}}{-(1+in)}\right)$$

$$\frac{1}{4\pi(1+n^2)}\left((1+in)e^{(1-in)\pi} - (1+in)e^{-(1-in)\pi} - (1-in)e^{-(1+in)\pi} + (1-in)e^{(1+in)\pi}\right)$$

$$\frac{1}{4\pi(1+n^2)}\left((1+in)e^{\pi}e^{-in\pi} - (1+in)e^{-\pi}e^{in\pi} - (1-in)e^{-\pi}e^{-in\pi} + (1-in)e^{\pi}e^{in\pi}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{4\pi(1+n^2)}\left((1+in)e^{\pi} - (1+in)e^{-\pi} - (1-in)e^{-\pi} + (1-in)e^{\pi}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{4\pi(1+n^2)}\left(2e^{\pi} - 2e^{-\pi}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi(1+n^2)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)} \sinh \pi.$$

Luego, la serie de Fourier de $f$ es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)} \sinh(\pi) e^{inx}.$$

Además, como $f$ es continua, $C^1$ en $\mathbb{R} - \{n\pi\}_{n\in\mathbb{Z}*}$ y existen las derivadas laterales en los puntos en donde $f$ no es derivable (de modo que $f'$ resulta $C^1$ a trozos), se tiene que la serie de Fourier converge uniformemente a $f$.

2. En particular, la serie de Fourier converge puntualmente en todo $x$, asi que podemos evaluar en $x = \pi$ y deducir que

$$f(\pi) = \cosh(\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)} \sinh(\pi) e^{in\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+n^2)} \sinh(\pi)$$

Luego,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi \cosh(\pi)}{\sinh(\pi)} = \frac{\pi}{\tanh(\pi)}.$$

3. Por item 1, no sólo sabemos que $S_N f \rightrightarrows f$ sino que $f'$ admite desarrollo en serie de Fourier y viene dado por derivar término a término la serie de $f$. Así, la serie de Fourier de la función $2\pi$-periódica definida en $(-\pi, \pi]$ como $\operatorname{senh}(x)$ es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{in(-1)^n}{\pi(1+n^2)} \sinh(\pi) e^{inx}.$$

Sin embargo, esta serie no converge uniformemente a $f'$ (notar que $f'$ no es continua).

□

## 2. Separación de variables

A continuación veremos un método desarrollado por Fourier para resolver la ecucación del calor

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 & k > 0 \text{ cte de conductividad térmica.} \\ u(0,t) = 0 = u(l,t) & \forall t \in [0,T] \\ u(x,0) = f(x) & \end{cases} \tag{1}$$

Buscamos una solución $u : [0,l] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ **no nula** planteando $u(x,t) = v(t)w(x)$. Derivando, obtenemos

- $u_t(x,t) = v'(t)w(x)$,
- $u_{xx}(x,t) = v(t)w''(x)$. Luego,
- $v'(t)w(x) - kv(t)w''(x) = 0$, o equiv $\frac{v'(t)}{v(t)} = k\frac{w''(x)}{w(x)}$ para todos $x, t$.

Entonces, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \lambda = k\frac{w''(x)}{w(x)}.$$

Notar que $v'(t) = \lambda v(t)$, por lo que $v(t) = ce^{\lambda t}$ y $c = v(0)$. Además,

$$\begin{cases} w''(x) - \frac{\lambda}{k}w(x) = 0 & \\ w(0) = 0 & \text{pues } u(0,t) = 0 = v(t)w(0) \forall t \\ w(l) = 0 & \end{cases} \tag{2}$$

Esta es una ecuación lineal de orden 2, por lo que admite solución, y de hecho conocemos la fórmula general. Para hallarla tomamos el polinomio característico asociado a la ecuación diferencial

$$P(X) = X^2 - \frac{\lambda}{k}$$

y hallamos sus raíces.

Notar que $\lambda \neq 0$, caso contrario tendríamos la ecuación diferencial $w''(x) = 0$ por lo que $w(x) = ax + b$ y, teniendo en cuenta las condiciones iniciales, deducimos que $w \equiv 0$, y luego $u$ es constantemente 0.

Si $\lambda > 0$, entonces $\frac{\lambda}{k} > 0$ y las raíces de $P(X)$ son $\left\{\pm\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\right\}$. Entonces,

$$w(x) = ae^{\sqrt{\frac{\lambda}{k}}x} + be^{-\sqrt{\frac{\lambda}{k}}x}$$

con $0 = w(0) = a + b$ y $0 = w(l) = ae^{\sqrt{\frac{\lambda}{k}}l} + be^{-\sqrt{\frac{\lambda}{k}}l}$, luego $a = 0 = b$ y $w = 0$.

Nos interesa entonces el caso en que $\lambda < 0$. En este caso, las raíces de $P(X)$ son $\left\{\pm i\sqrt{\frac{-\lambda}{k}}\right\}$ y

$$w(x) = a\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}}x\right) + b\sin\left(\sqrt{\frac{-\lambda}{k}}x\right),$$

con $0 = w(0) = a$ y $0 = w(l) = b\sin\left(\sqrt{\frac{-\lambda}{k}}l\right)$. Al ser $b \neq 0$, deducimos que $\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}}l\right) = 0$ ie. que

$$\sqrt{\frac{-\lambda}{k}}l = n\pi \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$

Despejando, $\lambda = -k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ con $n \in \mathbb{N}$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos una función $w_n = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ que satisface la ecuación diferencial (2).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x,t) = v(t)w_n(x)$ satisface la ecuación diferencial del calor, pero no necesariamente vale la condición inicial $u(x,0) = f(x)$. Planteamos

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

y buscamos los coeficientes $b_n$ para que se satisfaga la condición inicial. Es decir, para que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = f(x)$. Queremos un desarrollo en senos de $f$. Para ello, extendemos $f$ a $[-l,l]$ para que sea impar, y luego calculamos su serie de Fourier trigonométrica y analizamos la convergencia de la serie a la función. En caso de tener convergencia de la serie a la función, podremos afirmar que

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

es solución a la ecuación del calor.

**Ejercicio 2.1.** *Resolver la siguiente ecuación diferencial en* $[0,1] \times [0,1]$ *usando separación de variables*

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} \\ u(0,t) = 0 = u(1,t) \quad \forall t \in [0,1] \\ u(x,0) = x(1-x) \end{cases}$$

*Resolución.* Aquí $k = 3$ y $l = 1 = T$ y $f(x) = x(1-x)$, asi que proponemos

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-3n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

con $b_n$ los coeficientes de Fourier de la función 2-periódica definida en $[-1,1]$ a partir de extender de forma impar la función $x(1-x)$. Es decir,

$$f(x) = \begin{cases} x(1-x) & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x(1+x) & \text{si } -1 \le x \le 0. \end{cases}$$

Así,

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^{1} f(x) \sin(n\pi x) dx = 2\int_0^1 (x-x^2)\sin(n\pi x) dx \\
&= -2(x-x^2)\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\bigg|_0^1 + 2\int_0^1 (1-2x)\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (1-2x)\cos(n\pi x) dx \\
&= \frac{2}{n\pi}(1-2x)\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\bigg|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 -2\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} dx \\
& \frac{-4}{(n\pi)^3}\cos(n\pi x)\bigg|_0^1 = \frac{-4}{(n\pi)^3}(\cos(n\pi) - 1) \\
& \implies b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{8}{(n\pi)^3} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}
\end{aligned}$$

Luego,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{((2n+1)\pi)^3} e^{-3(2n+1)^2\pi^2 t} \sin((2n+1)\pi x).$$

□

Comentario: no memorizar la fórmula, se puede deducir.

**Ejercicio 2.2.** *Resolver la siguiente ecuación diferencial usando separación de variables*

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0 \\ u_x(0,t) = 0 = u(5,t) & \forall t \in [0,1] \\ u(x,0) = 2\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(\frac{5\pi x}{10}\right) \end{cases}$$

*Resolución.* Planteo $u(x,t) = v(t)w(x)$ y derivando deduzco que

$$v'(t)w(x) - 2v(t)w''(x) = 0.$$

Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \lambda = \frac{2w''(x)}{w(x)}.$$

Luego $v(t) = ce^{\lambda t}$, y $w$ satisface la ecuación diferencial

$$\begin{cases} w''(x) - \frac{\lambda}{2}w(x) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ w(5) = 0 \end{cases}$$

Se puede ver que si $\lambda \geq 0$ entonces $w = 0$, por lo que nos quedamos con el caso $\lambda < 0$. Las raíces del polinomio característico $P(X) = X^2 - \frac{\lambda}{2}$ son en este caso $\left\{\pm i\sqrt{\frac{-\lambda}{2}}\right\}$ y

$$w(x) = a\cos\left(\sqrt{\frac{-\lambda}{2}}x\right) + b\sin\left(\sqrt{\frac{-\lambda}{2}}x\right),$$

con $0 = w'(0) = b\sqrt{\frac{-\lambda}{2}} \implies b = 0$ y $0 = w(5) = a\cos\left(\sqrt{\frac{-\lambda}{2}}5\right)$. Luego, como $a \neq 0$ se tiene que

$$\sqrt{\frac{-\lambda}{2}}5 = \frac{\pi}{2} + n\pi \implies \lambda = -2\left(\frac{\pi}{10} + \frac{n\pi}{5}\right)^2 \quad \text{con } n \in \mathbb{N}_0.$$

Proponemos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\left(\frac{\pi}{10}+\frac{n\pi}{5}\right)^2 t} a_n \cos\left(\left(\frac{\pi}{10} + \frac{n\pi}{5}\right)x\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\left(\frac{\pi}{10}+\frac{n\pi}{5}\right)^2 t} a_n \cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{10}x\right). \end{aligned}$$

Evaluando en $t = 0$ se tiene que

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{10}x\right) = 2\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(\frac{5\pi x}{10}\right).$$

Deducimos que $a_0 = 2, a_2 = -\frac{1}{3}$ y el resto de los $a_n$ es 0.

Así,

$$u(x,t) = e^{-2\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 t} \cdot 2\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) - \frac{1}{3}e^{-2\left(\frac{5\pi}{10}\right)^2 t}\cos\left(\frac{5\pi x}{10}\right).$$

□