Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2024

Práctica N° 1: Diferencias Finitas (Introducción)

Discretización de derivadas

Ejercicio 1 Para las siguientes discretizaciones de la derivada primera, halle una expresión para el error local y señale las hipótesis de suavidad necesarias sobre la función u para que el orden de precisión sea el indicado en cada caso.

$$\begin{array}{llll} u'(x) \sim & \frac{u(x+h)-u(x)}{h} & \text{(diferencia forward)} & O(h) \\ u'(x) \sim & \frac{u(x)-u(x-h)}{h} & \text{(diferencia backward)} & O(h) \\ u'(x) \sim & \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} & \text{(diferencia centrada)} & O(h^2) \end{array}$$

Repita el análisis para la discretización con diferencias centradas de la derivada segunda.

$$u''(x) \sim \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}, \qquad \text{de orden } O(h^2)$$

¿Qué hipótesis de suavidad es necesaria en este último caso?

Ejercicio 2 Las siguientes son versiones de orden 2 de las diferencias forward o backward, que utilizan nodos a un solo lado de x.

(a) Verifique que la siguiente fórmula para la derivada primera tiene orden $O(h)$:

$$u'(x) \sim -\frac{1}{h}\left(\frac{3}{2}u(x) - 2u(x+h) + \frac{1}{2}u(x+2h)\right)$$

(b) Halle una fórmula de aproximación de orden $O(h^2)$ para la derivada segunda $u''(x)$ que utilice los valores de u en $x, x+h$ y $x+2h$.

(c) ¿En qué intervalo tienen que estar acotadas las derivadas de orden superior?

Problemas de Valores Iniciales

Ejercicio 3 Dada una constante $a > 0$, considere el problema de valores iniciales para $t > 0$.

$$y'(t) = -ay(t) \qquad y(0) = 1$$

Para cada paso temporal Δt fijo se consideran las discretizaciones

$$\begin{array}{rcll} \frac{y^{n+1}-y^n}{\Delta t} &=& -ay^n & \text{Euler explícito} \\ \frac{y^{n+1}-y^n}{\Delta t} &=& -ay^{n+1} & \text{Euler implícito} \\ \frac{y^{n+1}-y^n}{\Delta t} &=& -a\left(\frac{1}{2}y^{n+1}+\frac{1}{2}y^n\right) & \text{Método } \theta=\frac{1}{2} \end{array}$$

Grafique la solución obtenida para $a = 7$, $\Delta t = 0.1$ y $0 < t < 3$. Demuestre que

(a) Para Euler explícito se tiene $|y_n| \to 0$ si $\Delta t < 2/a$, y $|y^n| \to \infty$ si $\Delta t > 2/a$.

(b) Para Euler implícito y el Método $\theta = \frac{1}{2}$, $y_n \to 0$ para todo h.

Ejercicio 4 Dada una constante $\lambda > 0$, se considera el problema para $t > 0$.

$$u'(t) = -\lambda(u - \cos(t)) - \sin(t) \qquad u(0) = 1$$

cuya solución exacta para todo λ es $u(t) = \cos(t)$.

(a) Muestre que el método de Euler de un paso es convergente para este problema.

(b) De la cota del error global para métodos de un paso, ¿Cuán pequeño hay que tomar Δt si se quiere garantizar que el error a tiempo $t = 2$ es menor que 10^{-4} en el caso $\lambda = 2100$?

Ejercicio 5 Considere el problema

$$y''(t) = -ay(t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \qquad 0 < t < T_f,$$

y la discretización explícita de 2 pasos

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{(\Delta t)^2} = -ay^n.$$

Muestre que $|y^n| \to \infty$ si $\Delta t > 2/\sqrt{a}$, y que en caso contrario $|y^n|$ permanece acotado.
Sug. Reemplace $y_n = \lambda^n$ y resuelva una ecuación de recurrencia para λ.

Problemas de Valores de Contorno

Ejercicio 6 (Condiciones de Dirichlet). Se desea resolver numéricamente la ecuación de Poisson en una dimensión con condiciones de borde de tipo Dirichlet

$$\left\{\begin{array}{rl} U_{xx}(x) = & f(x), \quad \text{para } x \in (0,1) \\ U(0) = & \alpha \\ U(1) = & \beta. \end{array}\right. \tag{1}$$

Para ello se considera la malla uniforme $\{x_j = hj,\ j = 0, 1, 2, \ldots m+1\}$ con $h = 1/(m+1)$. Para los puntos de la malla $x_j \in (0,1)$ El esquema de diferencias centradas para la derivada segunda(Ej. 1) conduce al sistema de ecuaciones:

$$\frac{1}{h^2}\left(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}\right) = f(x_j) \qquad \text{para } j = 1, 2, 3, \ldots m.$$

Utilizando las condiciones de borde $u_0 = \alpha, u_{m+1} = \beta$ se obtiene el sistema

$$A^h u^h = F^h \tag{2}$$

donde $u^h = [u_1, u_2, \ldots, u_m]^T$ es el vector de incógnitas, mientras que la matriz tridiagonal A^h y el vector F^h están dados por:

$$A^h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad F^h = \begin{bmatrix} f(x_1) - \alpha/h^2 \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) - \beta/h^2 \end{bmatrix}$$

Se define el error de truncado en la malla como

$$\tau_j^h = (A^h U)_j - U''(x_j), \qquad \tau^h = [\tau_1^h, \cdots, \tau_m^h]$$

donde U es la solución de (1). Para h fijo, definimos el error puntual en x_j como

$$e_j^h = U(x_j) - u_j^h, \qquad e^h = [e_1^h, \cdots, e_m^h]$$

(a) Escriba un programa que permita obtener la solución U dado f.

(b) Grafique el tiempo de ejecución en función de n si se utilizan matrices llenas o matrices ralas (ver `SparseArrays`).

(c) Demuestre que si $f \in C^2(0,1)$ existe una constante C independiente de h y de m tal que

$$\max_{1\leq j\leq m} \left|\tau_j^h\right| < Ch^2$$

(d) Para $f = \sin(2\pi x)$, utilizando la solución exacta grafique $\|e^h\|_\infty$ en función de h y en escala logarítmica, para valores de $h \to 0$. ¿Cuál es la pendiente que se observa?

Ejercicio 7 (Condiciones de Neumann). Se desea resolver numéricamente la ecuación de Poisson en una dimensión con condiciones de Neumann en $x = 0$ y de Dirichlet en $x = 1$,

$$\begin{cases} U_{xx}(x) = & f(x), \quad \text{para } x \in (0,1) \\ U_x(0) = & 0 \\ U(1) = & 0. \end{cases} \tag{3}$$

Obtenga matrices para el problema discreto, si para la condición de Neumann $U_x(0) = 0$ se realizan las siguientes aproximaciones:

(a) $u_1 - u_0 = 0$ (diferencias forward)

(b) $u_1 - u_{-1} = 0$ (diferencias centradas y nodo ficticio)

(c) $\frac{3}{2}u_0 - 2u_1 + \frac{1}{2}u_2$ (diferencias forward de orden 2 del Ej. 2)

Sug. Para el caso del nodo ficticio, añada la ecuación $1/h^2\,(u_{-1} - 2u_0 + u_1) = f(x_0)$.

(a) ¿Cuál es el orden del error de truncado en los nodos interiores?

(b) Y para el punto $x = 0$, ¿Cuál es el orden del error de truncado de las distintas discretizaciones propuestas?

(c) Comparando contra la solución exacta en el caso $f = \sin(2\pi x)$ y tomando $e_m = \|U - u\|_\infty$, estudie numéricamente cuál es el orden de aproximación que se observa para la solución del problema en cada caso.

Ejercicio 8 (Capa límite) Considere la *ecuación de convección-difusión*

$$\begin{cases} U_t + aU_x = & \kappa U_{xx} + \phi, \quad \text{para } x \in (0,1) \quad t > 0 \\ U(x,0) = & U_0(x) \qquad x \in (0,1), \\ U(0,t) = & \alpha \qquad t > 0 \\ U(1,t) = & \beta \qquad t > 0 \end{cases} \tag{4}$$

para constantes de difusividad $\kappa > 0$ y de convección $a \in \mathbb{R}$ dadas. Llamando $\mathrm{Pe} = a/\kappa$ al *número de Péclet* y tomando $\varepsilon = 1/\mathrm{Pe}$, verifique que una solución $u(x,t)$ de (4) independiente de t (estacionaria), satisface una ecuación de la forma

$$\varepsilon U_{xx} - U_x = f, \qquad U(0) = \alpha \quad U(1) = \beta. \tag{5}$$

cuya solución exacta para el caso $f(x) = 1$ está dada por

$$U_\varepsilon(x) = \alpha + x + (\beta - \alpha - 1)\left(\frac{e^{x/\varepsilon} - 1}{e^{1/\varepsilon} - 1}\right)$$

(a) Grafique la solución exacta para el caso $\alpha = 1, \beta = 3$ a medida que $\varepsilon \to 0$. Interprete el significado del término *capa límite* que se suele aplicar al comportamiento de $U_\varepsilon(x)$ para x cerca del borde $\{x = 1\}$ y $\varepsilon \to 0$. ¿De qué tamaño es la *capa límite*?

(b) Resuelva numéricamente la ecuación (5) usando diferencias centradas para las derivadas primera y segunda, y una malla de tamaño h. Grafique el error para distintos valores de h y ε. ¿Qué ocurre si $h >> 2\varepsilon$?

(c) Resuelva la ecuación (5) pero ahora usando diferencias centradas para la derivada segunda y diferencias forward para la derivada primera. Compare los resultados con los obtenidos anteriormente.

Normas de matrices y radio espectral

Ejercicio 9 Muestre que una matriz diagonalizable $A = K^{-1}\Lambda K$ satisface

$$\rho(A) \leq \|A\|_2 \leq \mathrm{cond}_2(K)\rho(A)$$

Concluya que si A es normal entonces $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Ejercicio 10 Exhiba una matriz A para la cual $\rho(A) < 1$ y sin embargo $||A||_2 > 1$.

Ejercicio 11 Una matriz se dice Toeplitz si es constante a lo largo de cada diagonal y sub-diagonal. Un caso particular es la matriz tridiagonal $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{bmatrix} \tag{6}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Llamando $h = 1/(n+1)$ y considerando $w^2 = c/b$, verifique que el q-ésimo autovector r^q de A está dado por

$$r_j^q = w^j \sin(q\pi jh), \qquad\qquad r^q = [r_1^q, \cdots, r_n^q],$$

y que el correspondiente q-ésimo autovalor está dado por

$$\lambda^q = a + 2bw\cos\left(q\pi h\right).$$

Ejercicio 12 (Teorema de Gerschgorin) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sea $R_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$. Pruebe que todo autovalor λ de A satisface $|\lambda - a_{i,i}| \leq R_i$ para algún i.

Ejercicio 13 Sea A una matriz estrictamente diagonal dominante por filas. Llamando $\alpha = \min_k \left(|a_{kk}| - \sum_{j\neq k} |a_{kj}|\right) > 0$, muestre que $\|A^{-1}\|_\infty < 1/\alpha$

Problemas semi-discretos

Ejercicio 14 Muestre que para el espacio $E = \left(\mathbb{C}^\infty([0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$ de funciones infinitamente derivables dotado con la norma infinito, el operador $L : E \to E$ dado por $L(U) = U_x$ no es continuo y por consiguiente tampoco es Lipschitz.

Ejercicio 15 Se considera el problema de la ecuación en derivadas parciales:

$$\left\{\begin{array}{rlll} U_t(t,x) = & U_{xx}(t,x), & x \in (0,1) & 0 < t \leq t_F \\ U(t,0) = & 0 & & 0 \leq t \leq t_F \\ U(t,1) = & 0 & & 0 \leq t \leq t_F \\ U(0,x) = & U_0(x) & x \in (0,1) & . \end{array}\right. \tag{7}$$

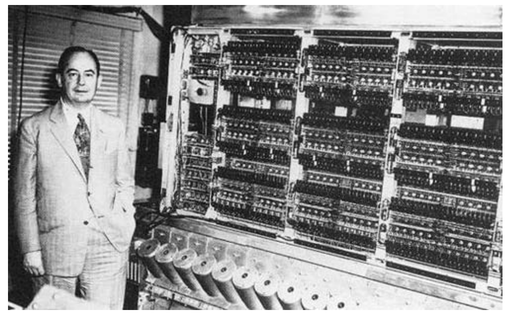
Tomando una grilla equiespaciada en la variable x dada por $\{x_i = ih\}_{0\leq i\leq N}$ con $h = 1/N$, definimos para cada t el vector $\tilde{U}(t) = \Big(U(x_0,t), \ldots, U(x_n,t)\Big)$ y consideramos la siguiente *semi-discretización* del problema original

$$\tilde{U}_t = A_h(\tilde{U}) \qquad \text{donde} \quad A_h(\tilde{U}) = \frac{\tilde{U}(x_{i+1},t) - 2\tilde{U}(x_i,t) + \tilde{U}(x_{i-1},t)}{h^2} \tag{8}$$

(a) De varios ejemplos de métodos totalmente discretos que resultan de resolver, para cada h fijo, el problema de valores iniciales para el sistema de EDO dado por (8) mediante métodos de un paso o multi-paso.

(b) Muestre que el operador $A_h : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}^{N-1}$ es de Lipschitz con constante $\frac{1}{h^2}$ en la norma infinito, y que por lo tanto, para cada h fijo, puede aplicarse la teoría de convergencia de métodos para sistemas de EDO de las discretizaciones dadas en el punto anterior.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet
Düren 1805 - Göttingen 1859



John von Neumann
Budapest 1903 - Washington 1957