1	2	3	Nota

Nombre y apellido:

Número de libreta:

Análisis Numérico

Primer Parcial – 10 de octubre de 2023

Ejercicio 1. (35 pts.)

Se quiere aproximar la solución del problema $U_t(x,t) = U_{xx}(x,t)$, con $x \in (0,1)$ y $t \in (0, T_F]$ con datos de borde Dirichlet homogeneos, mediante el esquema de diferencias finitas:

$$u_j^{n+1} - u_j^{n-1} = r(\delta_x^2(u_j^{n+1}) + \delta_x^2(u_j^{n-1})),$$

donde $\delta_x^2(u_j^n) = u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n$ y $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

Asumiendo que los valores de u_j^0 y u_j^1 son conocidos y que $U \in C^4(0,1) \cap C[0,1] \times C^2(0,T_F]$

a) (13 pts.) Mostrar que el esquema es incondicionalmente consistente.

b) (12 pts.) Mostrar, usando el método de Fourier, que el esquema es incondicionalmente estable en $\|\cdot\|_2$.

c) (10 pts.) Demostrar, usando la relación de recurrencia de los errores, que si $r \leq \frac{1}{2}$ el método resulta ser convergente en $\|\cdot\|_\infty$.

Ejercicio 2. (30 pts.) Consideremos el siguiente problema de reacción-difusión con $c > 0$ y $0 < \sigma << 1$:

$$\begin{cases} U_t = \sigma U_{xx} + cU & x \in (0,1),\ t \in (0,T_F] \\ U(0,t) = U(1,t) = 0 & t \in (0,T_F). \\ U(x,0) = U_0(x) & x \in (0,1) \end{cases}$$

Se propone el siguiente método implícito

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sigma \frac{\delta_x^2(u_j^{n+1})}{(\Delta x)^2} + c u_j^n$$

a) (15 pts.) Formular el esquema en forma matricial y verificar que se satisfacen las hipótesis del Teorema de equivalencia de Lax.

b) (15 pts.) Demostrar que el esquema es incondicionalmente estable en norma infinito.

Ejercicio 3. (35 pts.)

Para la ecuación $U_t + U_x = 0$ y se propone el siguiente esquema:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \gamma \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + (1-\gamma) \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

con $0 \leq \gamma \leq 1$.

a) (10 pts.) Analizar la condición CFL para los distintos valores de γ.

b) (13 pts.) Dar condiciones sobre γ para que el método resulte incondicionalmente estable en $\|\cdot\|_2$.

c) (12 pts.) Analizar el error de amplitud y de fase para $\gamma = \frac{1}{2}$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

(*) Al lado de cada item podrá ver el puntaje del mismo. Para aprobar debe tener un puntaje mayor o igual a 60 pts.