PRÁCTICA 7: APLICACIONES

Los siguientes ejercicios son parte de los exámenes del curso *Temps de mélange* de Justin Salez.

Ejercicio 1.
Sea $n \geq 3$, $p \in (0,1)$. Consideremos una sucesión de variables aleatorias i.i.d. $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ con valores en $\{-1, 0, 1\}$ tales que

$$\mathbb{P}(\xi_1 = -1) = \frac{1-p}{2}, \quad \mathbb{P}(\xi_1 = 0) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \frac{p}{2}.$$

Definamos ahora un proceso $(X_k)_{k\geq 0}$ en $\mathbb{T} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con valor inicial $X_0 = x$, $x \in \mathbb{T}$, y

$$X_k := x + \xi_1 + \cdots + \xi_k \bmod(n).$$

1. Justificar que $(X_k)_{k\geq 0}$ es irreducible y recurrente positivo, y encontrar la medida invariante π.

2. Hallar el grado maximal y el diámetro de la cadena. ¿Qué se puede deducir para t^n_{mix}?

3. Determinar la conductancia $\Phi(P)$ de la cadena. ¿Qué se puede deducir para t^n_{mix}?

4. Encontrar constantes $\mu \in \mathbb{R}$ y $\kappa > 0$ (que dependen de p) tales que para todo $m \geq 0$

$$\mathbb{P}\Big(\xi_1 + \cdots + \xi_m \in \big(\mu m - \kappa\sqrt{m}, \mu m + \kappa\sqrt{m}\big)\Big) \geq \frac{3}{4},$$

   y deducir que $n^2 = O(t^n_{\text{mix}})$.

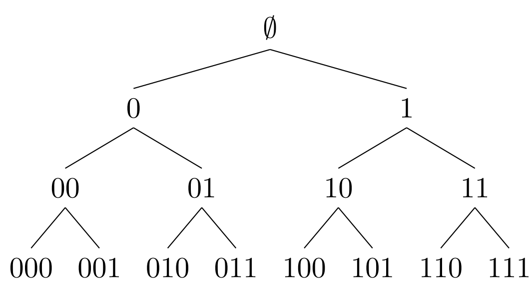
5. Dado $x \in \mathbb{T}$, definir $\Phi_x : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ como

$$\Phi_x(z) = \exp\Big\{\frac{2\pi i z x}{n}\Big\}, \quad z \in \mathbb{T}.$$

   Calcular $P\phi_x$. Deducir que el tiempo de relajación satisface $t^n_{\text{rel}} \asymp \alpha n^2$ cuando $n \to \infty$, para una constante $\alpha = \alpha(p)$ a determinar.

Nota: Dadas dos sucesiones $\{a_n\}_{n\geq 1}$ y $\{b_n\}_{n\geq 1}$, la notación $a_n = O(b_n)$ significa que para alguna constante $c > 0$ vale $\frac{a_n}{b_n} \leq c$ para todo n, en tanto que $a_n \asymp b_n$ significa que $a_n = O(b_n)$ y $b_n = O(a_n)$.

Ejercicio 2. Consideremos el árbol binario de altura n, T_n, ilustrado abajo para $n = 3$, y el paseo aleatorio simple, simétrico, y perezoso en T_n.



1. Identificar la medida invariante, justificar que el paseo aleatorio es reversible, y probar que $t^n_{\text{mix}} \geq n$.

2. Utilizando el método de congestión, probar que $t^n_{\mathrm{rel}} \leq n2^{n+1}$. ¿Qué se puede deducir para t^n_{mix}?

3. Mostrar que la conductancia de la cadena satisface $\Phi(P) \leq \frac{1}{2^n}$. ¿Qué se puede deducir para t^n_{rel} y t^n_{mix}?

4. Describir un acoplamiento que preserve el orden de las alturas, donde definimos la altura de $x \in T_n$ como $|x| :=$ distancia de x a la raíz $\emptyset$. Es decir, si $|X_0| \leq |Y_0|$, entonces $|X_k| \leq |Y_k|$, $k \geq 1$.

5. Dado $0 \leq k \leq n$, sea t_k el tiempo medio que tarda un paseante inicialmente en un vértice de altura k en alcanzar la raíz (observemos que sólo depende de k, y no de la elección particular del vértice en la k-ésima generación). Encontrar una relación de recurrencia satisfecha por los tiempos $\{t_k\}_{0\leq k\leq n}$. Probar que

$$t_k = 2^{n+3}\big(1 - \frac{1}{2^k}\big) - 6k.$$

6. Calcular los órdenes de t^n_{rel} y t^n_{mix} cuando $n \to \infty$. ¿Hay cutoff?

Ejercicio 3. Consideremos el paseo aleatorio simple, simétrico, y perezoso en el toro $\mathbb{T}^n_2 = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$, con transiciones

$$p_n(z, z') = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } z = z', \\ \frac{1}{8} & \text{si } z' - z \in \{(1,0),\ (-1,0),\ (0,1),\ (0,-1)\} \text{ módulo } (n\mathbb{Z})^2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

1. Calcular el diámetro de la cadena. ¿Qué se puede deducir para t_{mix}?

2. Probar que $t_{\mathrm{rel}} = O(n^2)$ usando el método de congestión.

3. Sea $f : \mathbb{T}^n_2 \to \mathbb{C}$ dada por $f((z_1, z_2)) = e^{\frac{2\pi i z_1}{n}}$. Calcular Pf y deducir que $t_{\mathrm{rel}} \asymp n^2$.

4. Construir un acoplamiento de manera que el tiempo de coalescencia T verifique $\mathbb{E}(T) = O(n^2)$.

5. Calcular el orden de t_{mix}. ¿Hay cutoff?