Práctica 6: Métodos variacionales

Ejercicio 1. Sea $(X_k)_{k\geq 0}$ una cadena de Markov irreducible y reversible en $\mathcal{X}$ con medida invariante π. Dado $A \subset \mathcal{X}$, sea $T_A^+ = \text{ínf}\{j \geq 1,\, X_j \ \in A\}$ el primer tiempo de retorno a A, es decir: si $X_0 \notin A$, T_A^+ coincide con el tiempo de llegada a A, si $X_0 \in A$, en cambio, el tiempo de llegada es 0, en tanto que $T_A^+ \geq 1$.
Consideremos el proceso inducido sobre A con transiciones

$$P_A(x,y) = \mathbb{P}^x(T_A^+ = y), \quad x,\, y \in A.$$

Este proceso se conoce como el proceso traza sobre A.

1. Encontrar la distribución invariante asociada a la cadena con transiciones P_A y probar que es reversible.

2. Dada $f : A \to \mathbb{R}$ definimos $\tilde{f} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ como $\tilde{f}(x) = \mathbb{E}^x[f(X_{T_A^+})]$. Probar que

$$P\tilde{f} = P_A f.$$

3. Sean γ_A y γ los gaps espectrales de P_A y P respectivamente. Probar $\gamma_A \geq \gamma$.

Ejercicio 2. Dada una matriz de transición P sobre $\mathcal{X}$, un automorfismo de P es una permutación $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ tal que

$$P\big(\phi(x),\, \phi(y)\big) = P(x,\, y), \quad \forall x,\, y \in \mathcal{X}.$$

Decimos que P es transitivo si para cualquier par de estados $x,\, y \in \mathcal{X}$, existe un automorfismo ϕ de P que verifica $\phi(x) = y$. Decimos que P es arco-transitivo si para cualquier par de aristas (x,y), (x',y') en E_P, existe un automorfismo ϕ de P con $\phi(x) = x'$, $\phi(y) = y'$.
Probar que

1. Si P es transitivo, entonces $\frac{1}{\gamma(P)} \leq \frac{\text{diam}^2(P)}{p_*}$, donde $p_* = \text{mín}_{(x,y)\in E_P} \pi(x)P(x,y)$.

2. Si P es arco-transitivo, entonces $\frac{1}{\gamma(P)} \leq \frac{\text{diam}^2(P)}{1-\alpha}$, con $\alpha = \sum_{x\in\mathcal{X}} \pi(x)P(x,x)$.

Sugerencia: usar el principio de comparación con la cadena Q que equilibra en un paso, $Q(x,y) = \pi(y)$, y elegir $\gamma_{x,y}$ uniformemente los caminos que vinculan x e y y tienen longitud mínima, para cualquier par $x,\, y \in \mathcal{X}$. Probar que vale

$$\sum_{e=(u,v)\in E_P} \Pi(e)c(e) = \sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{X}} \pi(x)\pi(y)\,\text{dist}^2(x,y) \leq \text{diam}^2(G_P),$$

con $\text{dist}(x,y)$ la distancia en el grafo G_P. Cuando P es arco-transitivo, $\Pi(e)c(e)$ no depende de la arista. Cuando P es transitivo, escribir

$$\sum_{e\in E_P} \Pi(e)c(e) = \sum_{x\in\mathcal{X}} \pi(x) \sum_{y\in\mathcal{X},\, y\neq x} P(x,y)c(x,y)$$

y concluir.