Práctica 5: Métodos geométricos

Ejercicio 1. Sea G_n el grafo que se obtiene uniendo dos copias K_n y K_n' del grafo completo con una sola arista. Calcular el orden del tiempo de mezcla del paseo aleatorio simple perezoso en G_n.

Ejercicio 2. Paseo aleatorio perezoso en el toro Probar que para el paseo aleatorio simple perezoso en el toro d-dimensional $\mathbb{T}_n^d$, el parámetro γ satisface $\gamma^{-1} = O(n^2)$. Deducir una cota inferior para el tiempo de mezcla.

Ejercicio 3. Recordemos que una función a valores reales f en un espacio métrico (Ω, d) es Lipschitz si existe $C > 0$ tal que para cualquier par x, y en Ω

$$|f(x) - f(y)| < C\, d(x, y). \tag{1}$$

Llamamos $\mathrm{Lip}(f)$ a la menor constante que verifica (1),

$$\mathrm{Lip}(f) := \max_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}.$$

Consideremos ahora un grafo $G = (V, E)$ y la distancia sobre V inducida por el grafo. Dadas dos medidas de probabilidad μ y ν en $\mathcal{M}_1(V)$, consideremos la distancia

$$\rho_{\mathrm{Lip}}(\mu, \nu) = \sup_{f,\, \mathrm{Lip}(f) \leq 1} \big| \mathbb{E}^{\mu}[f] - \mathbb{E}^{\nu}[f] \big|.$$

Mostrar que $\rho_{\mathrm{Lip}}(\mu, \nu) \leq \mathcal{W}(\mu, \nu)$, la distancia de Wasserstein.

Ejercicio 4. Considerar el proceso de exclusión en el grafo completo con $2n$ vértices: se tienen n partículas negras indistinguibles y n partículas blancas indistinguibles, y cada vértice es ocupado por exactamente una partícula. En cada instante de tiempo se elige una arista al azar, y se intercambian las partículas que ocupan los extremos de la arista. Probar una cota superior de orden $n \log n$ para el tiempo de mezcla de esta dinámica.

Ejercicio 5. Sea $(X_k)_{\geq 0}$ el paseo aleatorio simétrico simple en $\mathbb{Z}$. Probar que para cualquier $d > 0$ y $k \geq 0$ vale

$$\mathbb{P}\big(|X_k| \geq d\big) \leq 2 \exp\Big(- \frac{d^2}{2k} \Big).$$

Con esto concluimos la demostración del teorema de Carne Varopoulos.
Sugerencia: observar que $\mathbb{P}(X_k \geq d) \leq \mathbb{P}(\exp(\lambda X_k) \geq e^{\lambda d})$, para cualquier $\lambda > 0$, acotar esta última expresión usando la desigualdad de Markov, y luego elegir λ convenientemente.