Práctica 4: Métodos espectrales

Ejercicio 1. Sea P una matriz de transición irreducible en un espacio finito I, π la distribución invariante asociada. Definimos Π como la matriz cuyas filas coinciden con π, es decir $\Pi_{i,j} = \pi_j$, $i, j \in I$. Probar que $\mathrm{Sp}(P - \Pi) = \{0\} \cup \mathrm{Sp}(P) \setminus \{1\}$.

Ejercicio 2. El objetivo de este ejercicio es demostrar que toda sucesión de matrices de transición $\{P_n\}_{n\geq 1}$ que cumple la condición producto y exhibe cutoff, puede ser perturbada de modo de producir una nueva familia Q_n que verifica la condición producto, y sin embargo no tiene cutoff.

a) Dados P irreducible y aperiódica con distribución invariante π, Π asociada a π como en el ejercicio anterior, y $\theta \in (0,1)$, definir $Q := (1-\theta)P + \theta\Pi$. Mostrar que Q es irreducible y aperiódica, con distribución invariante π.

b) Probar que $D_Q(k) = (1-\theta)^k D_P(k)$, y concluir que

$$t_{\mathrm{rel}}(Q) = \frac{t_{\mathrm{rel}}(P)}{1 - t_{\mathrm{rel}}(P)\log(1-\theta)}.$$

c) Dada $\{P_n\}_{n\geq 1}$ como en el enunciado, tomar $Q_n = (1-\theta_n)P_n + \theta_n \Pi_N$ con

$$\frac{1}{t_{\mathrm{mix}}(P_n)} \ll \theta_n \ll \frac{1}{t_{\mathrm{rel}}(P_n)}.$$

Probar que $t_{\mathrm{rel}}(Q_n) \sim t_{\mathrm{rel}}(P_n)$ y que

$$t_{\mathrm{mix}}(Q_n, \varepsilon) \sim \frac{1}{\theta_n}\log(1/\varepsilon)$$

Concluir que $\{Q_n\}_{n\geq 1}$ satisfice la condición producto, pero no presenta cutoff.

Ejercicio 3. Sea P una matriz de transición irreducible, aperiódica y reversible con respecto a la medida invariante asociada π. Probar que

$$\mathrm{Var}_\pi(P^k f) \leq \lambda_*^{2k}\,\mathrm{Var}_\pi(f).$$

Ejercicio 4. Cut off para el paseo aleatorio perezoso en el hipercubo Sea $\{P_n\}_{n\geq 1}$ la matriz de transición del paseo aleatorio perezoso en el hipercubo $X = \{0,1\}^n$.

a) Probar que para cualquier conjunto $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$,

$$\phi_I(x) = (-1)^{\sum_{i\in I} x_i}$$

es autofunción de P_n con autovalor $\lambda_I = 1 - \frac{|I|}{n}$. Probar que forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^X$. Concluir que $\lambda_*(P_n) = 1 - \frac{1}{n}$ y que

$$t_{\mathrm{rel}}(P_n) \sim n.$$

b) Sea π la medida uniforme en X. Probar que valen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} 4\|P^k(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{\mathrm{vt}}^2 &\leq \left\| \frac{P^k(x,\cdot)}{\pi(\cdot)} - 1 \right\|_{2,\pi}^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \exp\Big(-\frac{2jk}{n}\Big) \\ &\leq e^{ne^{-\frac{2k}{n}}} - 1. \end{aligned}$$

c) Deducir del ítem anterior que $D_{P_n}(\alpha n \log n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ si $\alpha > 1/2$.

d) Aplicar el método de Wilson al par (λ, f) dado por $\lambda = 1 - \frac{1}{n}$ y $f = \sum_{i=1}^{n} \phi_{\{i\}}$ para probar que
$$D_{P_n}(\alpha n \log n) \geq \left(1 + \frac{4}{n^{1-2\alpha+o(1)}}\right)^{-1},$$
y en particular $D_{P_n}(\alpha n \log n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ si $\alpha < 1/2$.

e) Concluir de c) y d) que $t_{\text{mix}}(P_n, \varepsilon) \sim \frac{n \log n}{2}$ cuando $n \to \infty$, para cualquier $\varepsilon \in (0,1)$ y en particular hay cutoff.

Un par de observaciones:

En la demostración del ítem b) utilizamos toda la descomposición espectral de P_n, no sólo el radio espectral.

El orden de tiempo de mezcla coincide con el calculado en el ejercicio 7 de la práctica anterior, con métodos probabilísticos (tiempos estacionarios fuertes).