Práctica 3: Distancia de variación total

Ejercicio 1. Sea $I = \prod_{k=1}^{n} I_k$ un espacio producto, I_k finito para todo k. Sean μ_k y ν_k distribuciones de probabilidad en I_k, $1 \leq k \leq n$, y tomemos $\mu = \prod_{k=1}^{n} \mu_k$, $\nu = \prod_{k=1}^{n} \nu_k$. Mostrar que

$$\|\mu - \nu\|_{\text{vt}} \leq \sum_{k=1}^{n} \|\mu_k - \nu_k\|_{\text{vt}}.$$

Ejercicio 2. Sean X e Y variables aleatorias Poisson con parámetros γ y λ respectivamente, y llamemos μ y ν a sus distribuciones. Probar que

$$\|\mu - \nu\|_{\text{vt}} \leq |\gamma - \lambda|.$$

Ejercicio 3. Sea $G = (V, E)$ un grafo finito y conexo de diámetro D. Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ un paseo aleatorio perezoso en G, es decir, en cada instante, el paseo tiene probabilidad $1/2$ de permanecer en la posición actual. Probar que para $\varepsilon < 1/2$ vale

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq \frac{D}{2}.$$

Ejercicio 4. Paseo aleatorio perezoso en el toro Sea $\mathbb{T}_n^d$ el toro d-dimensional $\mathbb{T}_n^d = \mathbb{T}_n^1 \times \cdots \times \mathbb{T}_n^1$ (d-copias). Dos vértices $x = (x_1, \dots, x_d)$ e $y = (y_1, \dots, y_d)$ son vecinos si $x_j = y_j$, $j \neq i$, y $x_i \equiv y_i \pm 1 \mod n$, para algún $1 \leq i \leq d$.
Consideremos el paseo aleatorio perezoso en $\mathbb{T}_n^d$. Probar que para cada dimensión d y $\varepsilon > 0$ existe una constante $C(d)$ tal que

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) \leq C(d)\, n^2 \log_2(1/\varepsilon)$$

Sugerencia: considerar la siguiente generalización del acoplamiento de paseos aleatorios $(X_k)_{k\geq 0}$ e $(Y_k)_{k\geq 0}$ comenzados en posiciones $x \neq y$, estudiado para $d = 1$. En cada tiempo, se elige una coordenada i al azar. Si los paseos ya coinciden esa coordenada, ambos se mueven (simultáneamente) en 1, -1 o 0 unidades en la coordenada i, con probabilidades $1/4$, $1/4$ y $1/2$ respectivamente. Si las posiciones de los paseos difieren en la coordenada i, elegir uno de los dos al azar, y moverlo en la coordenada i en ± 1 unidades, con probabilidad $1/2$ para cada dirección. El otro paseo queda en la posición original.
Sea

$$\tau_i = \text{mín}\{k \geq 0,\ X_k(i) = Y_k(i)\}$$

el tiempo en que las coordenadas i-ésimas de los paseos coinciden por primera vez. Probar que

$$E^{x,y}[\tau_i] \leq \frac{dn^2}{4}.$$

Escribir $\tau = \text{mín}\{k \geq 0, X_k = Y_k\} = \text{máx}_{1\leq i\leq d} \tau_i$ para concluir que

$$E[\tau] \leq \frac{d^2 n^2}{4},$$

y utilizar esta última desigualdad para acotar el tiempo de mezcla del paseo.

Ejercicio 5. Sea $(X_k)_{k\geq 0}$ el paseo aleatorio simétrico simple en el círculo $\mathbb{T}_n^1$, $X_0 = 0$. Sea $\tau = \text{mín}\{k \geq 0,\ \mathbb{T}_n^1 = \{X_0, \dots, X_k\}\}$ la primera vez que el paseo visita todos los vértices del círculo, y $W = X_\tau$ la posición del paseo en este tiempo. Probar que W está uniformemente distribuido en $\mathbb{T}_n^1 \setminus \{0\}$.

Ejercicio 6. Dadas dos distribuciones μ, ν sobre un espacio Ω, y $f : \Omega \to \mathbb{R}$, se tiene que

$$\|\mu - \nu\|_{\mathrm{vt}} \geq \frac{\delta^2}{\delta^2 + \sigma^2},$$

si $\delta = |\mu f - \nu f|$ y $\sigma^2 = 2\operatorname{Var}_\mu(f) + 2\operatorname{Var}_\nu(f)$.

Ejercicio 7. Paseo aleatorio perezoso en el hipercubo Sea $(X_k)_{k\geq 0}$ el paseo aleatorio perezoso en el hipercubo $\{0,1\}^n$. Usar el tiempo estacionario fuerte definido en clase para probar que, para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon) \leq n\,\log n + n\frac{\pi}{\sqrt{6\varepsilon}}.$$