Práctica 1: Cadenas de Markov

Ejercicio 1. Ruina del jugador Consideremos un jugador que en cada etapa de un juego gana o pierde un peso. Los juegos que realiza son independientes entre sí, y la probabilidad de ganar \$1 es p, con $0 < p < 1$, mientras que la de perder \$1 es $q = 1 - p$. El apostador sólo se retira del juego cuando su fortuna llega a $\$N$ ($N \in \mathbb{N}$ fijo) o cuando se queda sin dinero. Llamemos S_n a la fortuna del jugador a tiempo n. Sea $T_N := \text{ínf}\{n \in \mathbb{N} : S_n = N\}$ y sea $\tau := \text{ínf}\{n \in \mathbb{N} : S_n = N \text{ o } S_n = 0\}$

a) Probar que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un proceso de Markov. ¿Cuál es la matriz de transición?

   i. Calcular $P_k(T_N < T_0)$ (es decir, calcular la probabilidad de ganar el juego dado que empezó con \$k.).

   ii. Probar que $P_k(\tau < \infty) = 1$.

b) Si ahora suponemos que el jugador sólo se retira cuando pierde todo su dinero (el espacio de estados es $\mathbb{N}_0$), hallar la probabilidad de que el juego termine, o sea, $P_k(T_0 < \infty)$. Usar esto para determinar cuáles son los estados recurrentes y cuáles los transitorios.

Ejercicio 2. Coleccionista de cupones Un hombre colecciona cupones en un álbum compuesto por N cupones distintos. El hombre adquiere sus cupones comprando uno por día en el kiosko de la esquina de su casa y, cada vez que adquiere uno, éste tiene igual probabilidad de ser cualquiera de los n que componen el álbum. Sea X_n la cantidad de cupones distintos que tiene a tiempo n.

a) Probar que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un proceso de Markov. ¿Cuál es la matriz de transición?

b) Calcular el número esperado de cupones que debe comprar el coleccionista para completar el álbum.

Ejercicio 3. El problema de los Paraguas Una persona tiene cuatro paraguas, algunos en su oficina y otros en su casa. Si al salir de su casa a la mañana, o del trabajo a la noche, está lloviendo y en el lugar en el que está hay un paraguas disponible, se lo lleva. Si no hay, se moja. Supongamos que, independientemente del pasado, la probabilidad de que llueva en cada viaje es p, con $0 < p < 1$. Sea X_n el número de paraguas en el sitio en cual se encuentra en ese instante.

a) Hallar la matriz de transición para la cadena de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Decidir si esta cadena tiene una única distribución estacionaria y en caso de que exista, hallarla.

c) Calcular la fracción del tiempo que la persona se moja (asintóticamente).

Ejercicio 4. Probar que la cadena en $\mathbb{N}_0$ dada por $p_{i,i+1} = p_i$ y $p_{i,0} = q_i = 1 - p_i \ \forall\ i \in \mathbb{N}_0$ con $\prod_{i=0}^{+\infty} p_i > 0$ no tiene medida invariante. Concluir que la cadena es transitoria.

Ejercicio 5. Encontrar un ejemplo de una cadena de Markov que tenga medida invariante pero que no sea recurrente.

Ejercicio 6. Modelo de Ehrenfest. Supongamos que tenemos N bolillas numeradas de 1 a N distribuidas en las urnas A y B. En cada unidad de tiempo una bolilla es elegida al azar y es cambiada de urna. Sea X_n la cantidad de bolillas que hay en la urna A a tiempo n. Probar que la distribución invariante para este proceso es la distribución binomial.

Ejercicio 7. Caso d=1. Considerar el paseo aleatorio simple $\{X_n, n \in \mathbb{N},\ X_0 = 0\}$ en $\mathbb{Z}$, con $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q = 1 - p\ \forall\ i \in \mathbb{Z}$, donde $0 \leq p \leq 1$.

a) Probar que

$$\mathbb{P}_0(X_{2n} = 0) = p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n$$

$$\mathbb{P}_0(X_{2n+1} = 0) = p_{00}^{(2n+1)} = 0.$$

Usar la fórmula de Stirling para concluir que el paseo aleatorio simétrico $p = q = \frac{1}{2}$ es recurrente, mientras que el asimétrico, $p \neq q$, es transitorio.

b) Probar que en el caso simétrico no hay distribuciones invariantes.

c) Probar que en el caso asimétrico hay dos medidas invariantes que no son una múltiplo de la otra.

Ejercicio 8. Caso d=2. Sea $\{X_n, n \in \mathbb{N},\ X_0 = 0\}$ en $\mathbb{Z}^2$ el paseo aleatorio simétrico en dos dimensiones con transiciones $p_{i,j} = \frac{1}{4}$ si $|i - j| = 1$ y 0 en otro caso.

a) Sean X_n^+ y X_n^- las proyecciones ortogonales de X_n en las diagonales $y = x$ y $y = -x$. Probar que X_n^+ y X_n^- son paseos aleatorios simétricos independientes en $2^{-1/2}\mathbb{Z}$ y además $X_n = 0 \Leftrightarrow X_n^+ = 0$ y X_n^-.

b) Probar que

$$p_{00}^{(2n)} = \left(\binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \right)^2 \sim \frac{2}{A^2 n}$$

cuando $n \to +\infty$, con A constante. Concluir que $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} = +\infty$ y que el paseo es recurrente.

Ejercicio 9. Un q-coloreo de un grafo $G = (V, E)$ es una asignación de colores en los vértices en V, sujeto a la condición que vértices vecinos no reciben el mismo color. Formalmente, un q-coloreo es un elemento x de $\{1, 2, \ldots, q\}^V$ tal que $x(v) \neq x(w)$ para todos los vértices $v \sim w$. Para una configuración x dada y un vértice v, llamamos a un color j permitido en v si j es diferente de todos los colores asignados a los vecinos de v. Es decir, un color es permitido en v si no pertenece al conjunto $\{x(w) : w \sim v\}$. Dado un q-coloreo x, podemos generar un nuevo coloreo de la siguiente manera:

- seleccionamos un vértice $v \in V$ al azar, y
- seleccionamos un color j uniformemente de todos los colores permitidos en v, re-coloreando el vértice v con el color j.

Encontrar la distribución estacionaria para la cadena de Markov resultante en el conjunto de q-coloreos de G (puede no ser única, si lo es en el caso $q > |V|$, por ejemplo).