

Práctica 5: Integrales

1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada partición $\pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ definimos

$$\pi(f) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Si $\pi_1 \subset \pi_2$ son dos particiones de $[a, b]$, entonces $\pi_1(f) \leq \pi_2(f)$.

2. Determine si las funciones siguientes son de variación acotada en el intervalo $[a, b]$ correspondiente y en caso afirmativo dar una mayoración para $V_f(a, b)$.

a) $f(x) = \cos(x)$, $x \in [0, 3\pi]$.

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, $x \in [-1, 2]$.

d)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)^2 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Estudie, además, la derivabilidad de la cuarta función.

3. Si f y g son funciones de variación acotada en $[a, b]$, entonces fg también lo es.
4. Para las funciones de variación acotada siguientes, encuentre la función V_f ; recordemos que $V_f(a) = 0$ y $V_f(x) = V_f(a, x)$ si $a < x \leq b$):

a)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } -1 \leq x < 0; \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1; \\ 1 - x, & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } -1 \leq x < 0; \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1; \\ 1 - x, & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

c) $f(x) = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$.

Para cada una de estas funciones encuentre explícitamente funciones monótonas crecientes g_1 y g_2 tales que $f = g_1 - g_2$.

5. Analice en cada caso la existencia de la integral $\int_a^b f d\alpha$ y calcúlela cuando corresponda.

- a) $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria y f una función constante sobre $[a, b]$.
 b) $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con $\alpha(a) = a_0$, $\alpha(b) = b_0$; $c \in (a, b)$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \in [a, c); \\ 3 & \text{si } x = c; \\ -1 & \text{si } x \in (c, b]. \end{cases}$$

¿Qué sucede si en lugar de ser α continua sólo se sabe que es continua en un entorno de c ?

- c) f como en el ítem anterior y

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, c); \\ -1 & \text{si } x \in (c, b]. \end{cases}$$

- d) $f(x) = x^3$, $\alpha(x) = x^2$ y $[a, b] = [-1, 3]$.
 e) $f(x) = \alpha(x) = \cos(x)$ y $[a, b] = [0, \frac{\pi}{4}]$.

6. Sean $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que f es continua e integrable respecto de α en $[a, b]$ y sea $c \in (a, b)$. Si $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisface $\beta(x) = \alpha(x)$ para todo $x \neq c$, muestre que $f \in \mathfrak{R}(\beta)$ en $[a, b]$ y $\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\beta$. ¿Qué sucede si $c = a$ o $c = b$?

7. Consideremos las funciones siguientes definidas en el intervalo $[0, 2]$:

$$f(x) = |x - 1|, \quad \text{y} \quad \alpha(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x = 0; \\ e^x & \text{si } x \in (0, 2]. \end{cases}$$

Muestre que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ en $[0, 2]$ y calcule $\int_0^2 f d\alpha$.

8. Sean $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $c \in (a, b)$ tales que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ en $[a, c]$ y $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ en $[c, b]$. Muestre que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ en $[a, b]$ y $\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha$.

9. Si $\int_a^b f d\alpha$ existe y es igual a 0 para toda función monótona creciente f , ¿qué se puede decir sobre la función α ?

Sugerencia: Para cada $c \in [a, b]$ considere la función monótona f_c tal que $f_c(x) = 0$ si $a \leq x \leq c$ y $f_c(x) = 1$ en caso contrario.

10. Una función definida sobre un intervalo cerrado y acotado y de variación acotada es integrable en el sentido de Riemann.

11. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 en $[a, b]$, entonces f es de variación acotada y $V_f(a, b) = \int_a^b |f'(x)| dx$.

12. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente.

a) Existe $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^b f d\alpha = f(c) (\alpha(b) - \alpha(a))$.

b) Si además α es derivable en (a, b) (pero no necesariamente de clase C^1), función

$$\psi(x) = \int_a^x f d\alpha$$

es derivable en (a, b) y $\psi'(x) = f(x)\alpha'(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

13. Sea $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que f es una función continua y α es de variación acotada.

a) $\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq V_\alpha(a, b) \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

b) Para cada $x \in [a, b]$ ponemos $\psi(x) = \int_a^x f d\alpha$; notemos que ψ está bien definida. Muestre que ψ es de variación acotada.

c) Si α satisface una condición de Lipschitz en $[a, b]$, entonces la función ψ definida en el punto anterior también satisface una condición de Lipschitz en $[a, b]$.