Práctica 4: Funciones continuas

1. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y A, B, X, $Y \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos. En cada uno de los siguientes casos, decida si corresponde $\subseteq$, $\supseteq$ o $=$ y pruébelo.

$$\begin{array}{cccc}
(i) & f(A \cup B) & \ldots\ldots & f(A) \cup f(B) \\
(ii) & f^{-1}(X \cup Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \\
(iii) & f(A \cap B) & \ldots\ldots & f(A) \cap f(B) \\
(iv) & f^{-1}(X \cap Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\
(v) & f(A^c) & \ldots\ldots & (f(A))^c \\
(vi) & f^{-1}(X^c) & \ldots\ldots & (f^{-1}(X))^c
\end{array}$$

2. Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función, entonces $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$ si y solo si para toda sucesión estrictamente decreciente $(x_n)_{n \geq 1}$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ vale que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

3. Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función monótona y $x \in (a, b]$. Si existe una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ con valores en $(a, b]$ tal que $x_n < x$ para todo $n \geq 1$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ y $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$, entonces $f(x^-) = l$. Enuncie el resultado correspondiente para $f(x^+)$ (recordemos que

$$f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \text{y} \quad f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)).$$

4. Sean A, $B \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subset B$. Si f es continua en $a \in A$ y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.

5.
   a) Una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(y)$ cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{Q}$ es necesariamente constante.

   b) Dos funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas que coinciden sobre $\mathbb{Q}$ son iguales.

6. Encuentre los puntos donde las siguientes funciones son continuas:

   a) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ con

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ con } a,\ b \in \mathbb{Z} \text{ coprimos y } b > 0; \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

7. Si $f : [a,b] \to [a,b]$ es una función continua, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.

   Sugerencia: Considere la función $x \mapsto x - f(x)$.

8. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) La función f es continua.
   b) El conjunto $f^{-1}(O)$ es abierto para todo $O \subseteq \mathbb{R}$ abierto.
   c) El conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado para todo $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado.

9. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces el gráfico de f es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$.

10. *a*) Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto. Si $f : K \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$, entonces existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.

    b) Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto que *no* es compacto, existe una función continua $f : A \to \mathbb{R}$ que toma valores positivos y tal que $\operatorname{ínf}\{f(x) : x \in A\} = 0$. Esto nos dice que la condición de que K sea compacto en la primera parte de este ejercicio es necesaria.

11. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$, entonces f es acotada inferiormente y tiene mínimo.

12. Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua.

    a) El conjunto $\{|x| : x \in K\}$ es compacto.
    b) Si $c \in f(K)$, entonces entre las raíces x de la ecuación $f(x) = c$ hay una de módulo mínimo.

13. * Como el conjunto $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ es numerable e infinito, hay una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ tal que $\mathbb{Q} \cap (0,1) = \{x_n : n \geq 1\}$.

    a) Si $x \in (0,1)$ y ponemos $\Omega_x = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x\}$, entonces la serie

    $$\sum_{n \in \Omega_x} \frac{1}{2^n}$$

    converge. Podemos entonces definir una función $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in (0,1)$ sea $f(x) = \sum_{n \in \Omega_x} 2^{-n}$.

    b) La función f es monótona creciente.
    c) La función f es discontinua en todo punto de $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ y, de hecho, si $x \in \mathbb{N}$ es $f(x_n^+) - f(x_n^-) = 2^{-n} > 0$.
    d) La función f es continua a izquierda, de manera que para todo $x \in (0,1)$ es $f(x^-) = f(x)$.
    e) La función f es continua en todo punto de $(0,1) \setminus \mathbb{Q}$.

14. Estudie la continuidad uniforme de las funciones siguientes:

    a) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$.
    b) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$.
    c) $f : x \in (r, +\infty) \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$, primero con $r = 0$ y luego con $r > 0$.
    d) $f : x \in (0,1) \mapsto \sin \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$.
    e) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R}$.

15. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ y sean f ,$g : S \to \mathbb{R}$ dos funciones uniformemente continuas.

    a) La función $f + g$ es uniformemente continua.
    b) En cambio, la función $f \cdot g$ no necesariamente es uniformemente continua, aún si alguna de las funciones f ó g es acotada.
    c) Si $h : f(S) \to \mathbb{R}$ es una función uniformemente continua definida sobre la imagen de f, entonces $h \circ f : S \to \mathbb{R}$ también lo es.

16. *a*) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que es uniformemente continua en los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$, entonces f es uniformemente continua en $[a, c]$.
    b) ¿Es cierto que si f es una función uniformemente continua sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y sobre un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$, entonces también lo es en $A \cup B$?

17. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Decimos que f es *localmente Lipschitz de orden* α *en* x_0 si existen $\varepsilon > 0$ y $M > 0$ tales que

$$0 \leq |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < M\, |x - x_0|^\alpha .$$

    Si $\alpha = 1$, decimos simplemente que f es Lipschitz en x_0.

    a) Si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x_0, entonces f es continua en x_0.
    b) Si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en x_0, entonces f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$.

18. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es Lipschitz sobre A si existe una constante $M > 0$, a la que en ese caso llamamos constante de Lipschitz de f, tal que

$$x, y \in A \implies |f(x) - f(y)| < M\, |x - y| .$$

    a) Una función Lipschitz es continua en su dominio.
    b) Una función definida sobre un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y allí derivable con derivada acotada es Lipschitz.
    c) La función$f : t \in [-1, 1] \mapsto \sqrt[3]{t} \in \mathbb{R}$ es uniformemente continua pero no es Lipschitz.

19. *a*) *Teorema de punto fijo de Banach.* Sea $S \subset \mathbb{R}$ y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz con constante de Lipschitz $M < 1$. Si el conjunto S es cerrado y $f(S) \subseteq S$, entonces existe $y \in S$ tal que $f(y) = y$.

    Sugerencia: Sea $x_1 \in S$. Muestre que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en S tal que $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \geq 1$ es una sucesión de Cauchy y considere su límite $y = \lim_{n\to\infty} x_n$.

    b) Muestre con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone que S es un conjunto cerrado.

    c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Muestre que f es Lipschitz con $M = 1$ pero que f no tiene puntos fijos.