Práctica 4

1. Analizar en cada caso la existencia de $\int\limits_a^b f\ d\alpha$ y en los casos afirmativos calcularla.

    (a) $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente y f una función constante sobre $[a,b]$.

    (b) $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y monótona creciente con $\alpha(a) = a_0$, $\alpha(b) = b_0$; sea $c \in (a,b)$ y sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) := \begin{cases} 5 & \text{si } x \in [a,c) \\ 3 & \text{si } x = c \\ -1 & \text{si } x \in (c,b] \end{cases}$.

    ¿Qué sucede si en lugar de tomar α continua sólo se sabe que α es continua en un entorno de c?

    (c) f como en el ítem anterior y $\alpha(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [a,c] \\ 1 & \text{si } x \in (c,b] \end{cases}$.

    (d) $f(x) = x^3$, $\alpha(x) = x^2$ y $[a,b] = [0,3]$.

    (e) $f(x) = \alpha(x) = \sin(x)$ y $[a,b] = [0, \frac{\pi}{4}]$.

2. Supongamos que $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona creciente, $\int\limits_a^b f d\alpha$ existe y es igual a 0 para toda f monótona creciente f. ¿Qué puede decir sobre la función α?

    Sugerencia. Para cada $c \in [a,b]$ considere la función monótona f_c definida como $f_c(x) = 0$ si $a \leq x \leq c$ y $f_c(x) = 1$ sino.

3. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente. Demostrar que si $f, g \in \Re(\alpha)$ y $f(x) \leq g(x)$, entonces $\int\limits_a^b f\ d\alpha \leq \int\limits_a^b g\ d\alpha$.

4. Para cada $x \in \mathbb{R}$ vamos a notar con $\lfloor x \rfloor$ a la parte entera de x, es decir: $\lfloor x \rfloor := \max \{n \in \mathbb{Z} \ / \ n \leq x\}$.

    Analizar la existencia de las integrales que siguen y en caso afirmativo calcularla:

    (a) $\int\limits_0^4 x^2\ d(\lfloor x \rfloor)$

    (b) $\int\limits_\pi^{2\pi} |\frac{3\pi}{2} - x|\ d(\cos x + \lfloor x \rfloor)$

    (c) $\int\limits_0^2 x^3\, d\alpha,$ donde $\alpha(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1], \\ 2 & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$

5. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ con α monótona creciente. Para cada partición $\pi = \{x_0, ..., x_n\}$ del intervalo $[a,b]$, se define $s_\pi := \sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

   Demostrar que si $f \in \Re(\alpha)$ entonces existe una sucesión de particiones $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que cumple las condiciones:

   (a) $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es monótona en el sentido siguiente: si $m < m'$ entonces $\pi_m \subset \pi_{m'}$.

   (b) $\lim\limits_{m\to\infty} \| \pi_m \| = 0$.

   (c) $\lim\limits_{m\to\infty} s_{\pi_m} = \int\limits_a^b f\ d\alpha$, independientemente de la elección de los t_k en cada suma s_{π_m}.

   (d) Si $(\sigma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión monótona de particiones tal que $\pi_m \subset \sigma_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, entonces cumple las condiciones (b) y (c) precedentes.

   Si ahora $g, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ son otras funciones, tales que $g \in \Re(\beta)$, β monótona creciente, y para cada partición π notamos $r_\pi := \sum\limits_{k=1}^{n} g(t_k)[\beta(x_k) - \beta(x_{k-1})]$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, deducir que entonces existe una sucesión de particiones $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} s_{\pi_m} = \int\limits_a^b f d\alpha$ y $\lim\limits_{m\to\infty} r_{\pi_m} = \int\limits_a^b g\ d\beta$.

6. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Para cada partición π de $[a,b]$ se define

$$\pi(f) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$

   si $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

   Demostrar que si $\pi_1 \subset \pi_2$ son dos particiones de $[a,b]$, entonces $\pi_1(f) \leq \pi_2(f)$.

7. Estudiar si las funciones que siguen son de variación acotada en el intervalo $[a,b]$ correspondiente y en el caso afirmativo dar una mayoración para $V_f(a,b)$.

   (a) $f(x) = \cos(x)$ en $[0, 3\pi]$ (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   (c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ en $[-1, 2]$ (d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)^2 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   En el caso (d) estudiar también la derivabilidad de f.

8. Demostrar que si f y g son funciones de variación acotada en $[a,b]$ entonces fg también lo es.

9. Para las funciones de variación acotada que siguen, hallar la función V_f (recordamos que $V_f(a) = 0$ y $V_f(x) = V_f(a, x)$ si $a < x \leq b$):

(a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1-x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ (b) $f(x) = \sin x$ en $[0, 2\pi]$

Para cada función encontrar explícitamente funciones monótonas crecientes g_1 y g_2 tales que $f = g_1 - g_2$.

10. Demostrar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función de variación acotada entonces es integrable Riemann.

11. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en $[a, b]$.

   (a) Demostrar que f es de variación acotada.

   (b) Demostrar que vale la igualdad $V_f(a, b) = \int\limits_a^b |f'(x)|\, dx$.

12. Sea $f, \alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que f es una función continua y α es de variación acotada.

   (a) Demostrar que $|f| \in \Re(V_\alpha)$.

   (b) Demostrar que vale la desigualdad $\left|\int_a^b f\, d\alpha\right| \leq \int\limits_a^b |f|\, dV_\alpha$. *Sugerencia.* Tener en cuenta el ejercicio 3.

   (c) Deducir de (b) que $\left|\int_a^b f\, d\alpha\right| \leq V_\alpha(a, b) \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

   (d) Para cada $x \in [a, b]$ se define $\psi(x) = \int_a^x f\, d\alpha$ (observar que ψ está bien definida). Probar que ψ es de variación acotada.