Práctica 2: Series

1. Estudie la convergencia de las siguientes series:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+3}$; *d)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$; *g)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}$;

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; *e)* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; *h)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$;

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$; *f)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$; *i)* $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n)$.

2. Encuentre la suma de las siguientes series:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$; *c)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; *d)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

3. Sume la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-4n+2}{n!}$.

   Sugerencia: Descomponer el término general en la forma $\frac{3n^2-4n+2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$.

4. Para cada serie, determinar cuántos términos es necesario sumar para obtener un resultado que difiera en menos de 10^{-6} de la suma total:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$; *c)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$.

5. ¿Es cierto que si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ divergen entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_k b_k$ también diverge?

6. * Pruebe que

   $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

   y usando esto, que la sucesión con término general

   $$r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

   converge. El límite de esta sucesión es la *constante de Euler-Mascheroni* y es igual a

   $$0{,}5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots$$

   Sugerencia: Recurde la demostración del criterio de comparación con una integral impropia.

7. *Criterio de Raabe.* Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de términos positivos, y notemos

$$\alpha_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

   a) Si $\alpha_n > 1$ para $n \gg 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

   b) Si $\alpha_n < 1$ para $n \gg 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

   Sugerencia: Analizar el comportamiento de la sucesión na_n para $n \gg 1$.

8. **Teorema de Abel.* Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de términos positivos tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

   Sugerencia: Utilice que $na_{2n} \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$ para probar que $(2n)a_{2n} \to 0$, y haga un razonamiento análogo para probar que $(2n+1)a_{2n+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

9. **Criterio de condensación de Cauchy.* Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de números no negativos, entonces las series $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} 2^n a_{2^n}$ convergen o divergen simultaneamente.

10. Decida si las siguientes series convergen absoluta o condicionalmente.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}$; *b*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$; *c*) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-2n-1}{n!}$.

11. *a*) Probar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces la serie $\sum a_n^2$ converge. ¿Puede obtenerse la misma conclusión si sólo se supone que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge condicionalmente?

   b) ¿Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y tiene todos sus términos no negativos, se puede concluir algo sobre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$?

12. Probar que si $|\alpha| < 1$ entonces $\frac{1}{(1-\alpha)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha^{k-1}$.

13. Determine para qué valores de x convergen las siguientes series:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$; *c*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$; *e*) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$;

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$; *d*) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$; *f*) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$.